



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Centrum DVPP

Závěrečná práce

Téma:

Obsah a obvod obrazce s využitím čtvercové
sítě ve výuce geometrie na 1. stupni ZŠ

Program: DVPP – Učitelství pro 1. stupeň ZŠ

Vypracovala: Mgr. Dagmar Jordánová

Odborný konzultant: doc. RNDr. Helena Koldová, Ph.D.

České Budějovice 2020

Prohlášení

Prohlašuji, že souhlasím se zveřejněním své závěrečné práce, a to v nezkrácené podobě/v úpravě vzniklé vypuštěním vyznačených částí archivovaných Pedagogickou fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu závěrečné práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly zveřejněny posudky odborného konzultanta a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby závěrečné práce. Toto prohlášení je doplněno datem a vlastnoručním podpisem autora. Tímto autor též prohlašuje, že se nedopustil plagiátorství. Na podporu svého prohlášení autor závěrečné práce zároveň provede a doloží porovnání textu závěrečné práce s databází kvalifikačních prací (např. prostřednictvím systému pro odhalování plagiátů Odevzdej.cz).

V Českých Budějovicích dne:

Podpis:

Anotace

Tato závěrečná práce se zabývá obsahem a obvodem obrazce s využitím čtvercové sítě v geometrii na 1. stupni ZŠ. Teoretická část práce popisuje, jakým způsobem je obsah a obvod obrazce ukotven v matematickém vzdělávání v České republice a jakou formou se objevuje v mezinárodních šetřeních a přijímacích zkouškách na střední školy. Tato část práce se také zaměřuje na obtíže žáků v této oblasti geometrie. Praktická část práce představuje vytvořený didaktický test pro 5. – 6. ročník základních škol, který je zaměřený na ověření znalostí žáků v oblasti obsah a obvod obrazce. Je zde popsána úspěšnost žáků šestého ročníku v řešení tohoto didaktického testu.

Klíčová slova: obsah, obvod, čtvercová síť

Abstract

This thesis deals with area and perimeter of the geometric shape using a square grid in geometry at the primary school. The theoretical part of the thesis describes how the area and perimeter of the pattern is anchored in mathematics education in the Czech Republic and in what form it appears in international assessments and entrance exams for secondary schools. This part also focuses on the difficulties of students in this part of geometry education. The practical part of the thesis is a didactic test for the 5th - 6th year of primary school, which is focused on verifying the knowledge of students in the area and perimeter of the shape. The success of sixth grade students in solving this didactic test is described here.

Keywords: area, perimeter, square grid

Poděkování

Tímto bych velmi ráda poděkovala paní doc. RNDr. Heleně Koldové, Ph.D. za odborné vedení a cenné připomínky v průběhu zpracovávání mé závěrečné práce.

Obsah

Úvod.....	6
1 Obsah a obvod obrazce ve školských dokumentech	7
1.1 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.....	7
1.2 Standardy pro základní vzdělávání	8
2 Obsah a obvod obrazce v mezinárodních šetřeních	11
2.1 Mezinárodní šetření TIMSS.....	11
2.2 Mezinárodní šetření PISA	14
3 Obsah a obvod obrazce ve státních přijímacích zkouškách	17
4 Pojmotvorný proces žáků při vytváření pojmu „míra“ v geometrii	23
4.1 Obtíže žáků v oblasti míry v geometrii v souvisejícím výzkumu.....	26
4.2 Didaktické důvody obtíží žáků.....	26
5 Ověření schopnosti žáků řešit úlohy zaměřené na obsah a obvod obrazce.....	28
5.1 Didaktický test	28
5.2 Charakteristika testovaných žáků.....	28
5.3 Rozbor úloh didaktického testu.....	29
5.3.1 Úloha 1 a 2.....	29
5.3.2 Úloha 3 a 4.....	31
5.3.3 Úloha 5.....	33
5.3.4 Úloha 6.....	35
5.3.5 Úloha 7 a 8.....	38
5.3.6 Úlohy 9 a 10.....	41
5.4 Shrnutí výsledků didaktického testu	44
6 Závěr.....	45
7 Literární zdroje	46
Přílohy.....	47

Úvod

Ve své závěrečné práci jsem se rozhodla věnovat pozornost obsahu a obvodu obrazce ve čtvercové síti v geometrii na 1. stupni základní školy.

Cílem práce bylo shrnout, jakým způsobem se toto téma objevuje ve státních dokumentech, mezinárodních šetřeních a také ve státních přijímacích zkouškách. Dalším cílem bylo zjistit, jaké mají žáci s tématem obsah a obvod obrazce obtíže a ověřit jejich schopnosti řešit úlohy tohoto typu poté, co mají za sebou vzdělání na 1. stupni ZŠ.

V první kapitole se věnuji obsahu a obvodu obrazce z hlediska školských dokumentů. Jako první zmiňuji Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, který pro toto téma určuje dva očekávané výstupy, jeden pro první a jeden pro druhý stupeň základní školy. Dále popisuji, jak je téma obvod a obsah obrazce zpracováno ve standardech pro základní vzdělávání a v metodických komentářích k nim vytvořených. Uvádím také konkrétní úlohy, které by měl žák po dokončení 5. ročníku základní školy zvládnout.

Druhá kapitola je zaměřená na mezinárodní šetření TIMSS a PISA, které v České republice pravidelně probíhají. Obě tato šetření obsahují úlohy ověřující schopnosti žáků řešit úlohy na obsah a obvod obrazce ve čtvercové síti. Každé šetření nejprve popisuji a dále uvádím vybrané úlohy, z těchto šetření včetně žakovské úspěšnosti.

Třetí kapitola zkoumá úlohy ve státních přijímacích zkouškách na všechny typy škol. Každoročně tyto testy obsahují úlohy týkající se výpočtu obvodu a obsahu útvaru. Velmi často jsou tyto útvary zasazené do čtvercové sítě. Z každého typu přijímacích zkoušek uvádím jednu ukázkovou úlohu.

Ve čtvrté kapitole popisuji, jak probíhá pojmotvorný proces v oblasti míry v geometrii a jaké obtíže se v tomto procesu u žáků objevují. Na závěr kapitoly uvádím nejčastěji zmiňované didaktické důvody těchto obtíží.

V páté kapitole se věnuji výsledkům zjišťování schopností žáků řešit úlohy zaměřené na obvod a obsah obrazce ve čtvercové síti. Nejprve popisuji, jakým způsobem zjišťování probíhalo a charakterizuji žáky, kteří se ho účastnili. V jednotlivých podkapitolách popisuji blíže jednotlivé úlohy a jejich správné řešení. Ke každé úloze uvádím celkovou úspěšnost žáků a blíže popisuji vybraná žakovská řešení.

Obsah a obvod obrazce ve školských dokumentech

Vzdělávání na základních školách v celé České republice se opírá o Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV). RVP ZV stanovuje mimo jiné konkrétní cíle a povinný obsah vzdělávání, který je závazný pro tvorbu školních vzdělávacích programů. Celé znění RVP ZV můžeme najít na internetových stránkách Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy¹ nebo Národního ústavu pro vzdělávání².

Z RVP ZV vycházejí Standardy pro základní vzdělávání, které stanovují minimum toho, co musí žák na konci pátého a devátého ročníku základní školy znát a umět. Standardy konkretizují očekávané výstupy z RVP ZV a doplňují je o ukázky ilustrativních úloh. Ke standardům pro základní vzdělávání jsou vytvořeny také metodické komentáře, které obsahují i vyšší požadavky, než jsou ty minimální. Oba tyto dokumenty jsou přístupné na internetových stránkách Národního ústavu pro vzdělávání³.

1.1 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

RVP ZV je rozdělen do devíti vzdělávacích oblastí, jednou z ní je Matematika její aplikace. Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace klade důraz na porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům v matematice a pochopení vztahů mezi nimi. Je založena na aktivních činnostech s matematickými objekty a na užití matematiky v reálných situacích. Umožňuje žákům získat matematickou gramotnost, která hraje nezastupitelnou roli v praktickém životě. (RVP ZV, 2017)

Obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace na 1. stupni základní školy se dělí na čtyři tematické okruhy: Čísla a početní operace, Závislosti, vztahy a práce s daty, Geometrie v rovině a v prostoru, Nestandardní aplikační úlohy a problémy. (RVP ZV, 2017) Dále se zaměřím pouze na geometrii v rovině a prostoru.

„V tematickém okruhu Geometrie v rovině a v prostoru žáci určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině (resp.

¹ <https://rvp.cz/informace/dokumenty-rvp/rvp-zv>

² <http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-zakladni-vzdelavani>

³ <http://www.nuv.cz/t/zarazeni-standardu-do-rvp-zv>

v prostoru), učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem), zdokonalovat svůj grafický projev. Zkoumání tvaru a prostoru vede žáky k řešení polohových a metrických úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací.“ (RVP ZV, 2017, s. 30)

Očekávané výstupy okruhu geometrie v rovině a prostotu RVP ZV obsahují jeden výstup týkající se obvodu obrazce v rovině a jeden výstup týkající se obsahu obrazce v rovině. Oba tyto výstupy jsou pro druhé období 1. stupně ZŠ.

M-5-3-02 „sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran“ (RVP ZV, 2017, s. 33)

M-5-3-04 „určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu“ (RVP ZV, 2017, s. 33)

Na druhém stupni základní školy se obvod a obsah obrazce v rovině objevuje také a v RVP ZV toto téma najdeme v tomto znění:

M-9-3-04 „odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů“ (RVP ZV, 2017, s. 36)

Hlavní rozdíl ve zmiňovaných očekávaných výstupech je ten, že na 1. stupni ZŠ by žáci měli řešit obvod a obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a teprve na 2. stupni ZŠ by se měli žáci učit obvod a obsah obrazce vypočítat.

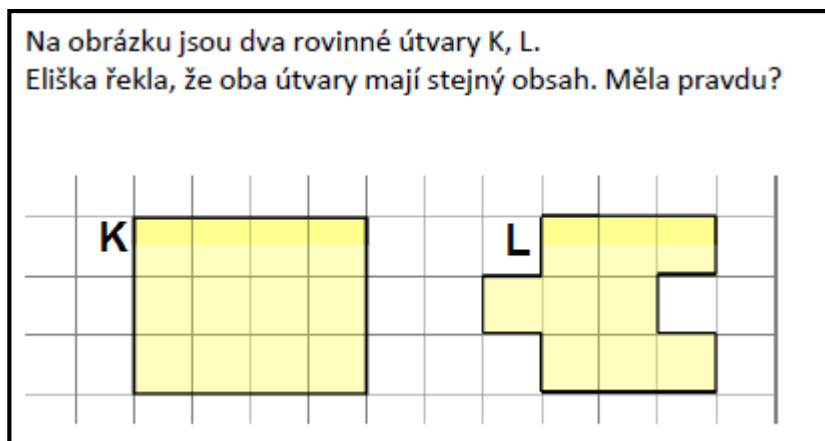
1.2 Standardy pro základní vzdělávání

Ve standardech pro základní vzdělávání je ke každému očekávanému výstupu z RVP ZV uvedena ilustrativní úloha, kterou by měl žák na konci daného období zvládnout. Tyto úlohy jsou na minimální úrovni. Standardy rozdělují očekávaný výstup M-5-3-04 na tyto dva indikátory:

- 1. žák určí pomocí čtvercové sítě obsah rovinného útvaru, který lze složit ze čtverců a obdélníků*
- 2. žák používá základní jednotky obsahu (cm^2 , m^2 , km^2) bez vzájemného převádění*

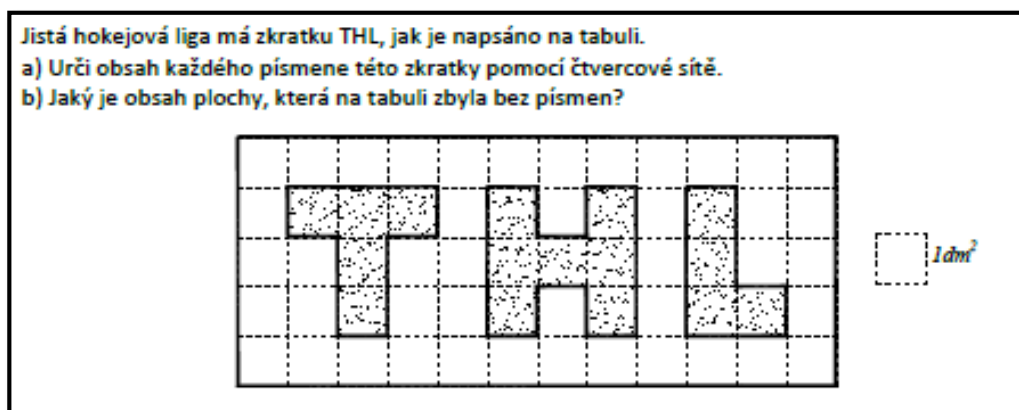
(Standardy pro základní vzdělávání, 2013, s. 70)

Standardy pro základní vzdělávání uvádí k očekávanému výstupu M-5-3-04 ilustrativní úlohu, která založená na porovnání obsahu dvou rovinných útvarů ve čtvercové síti. Žák počítá počet čtverečků na obou obrázcích a počty následně porovná.

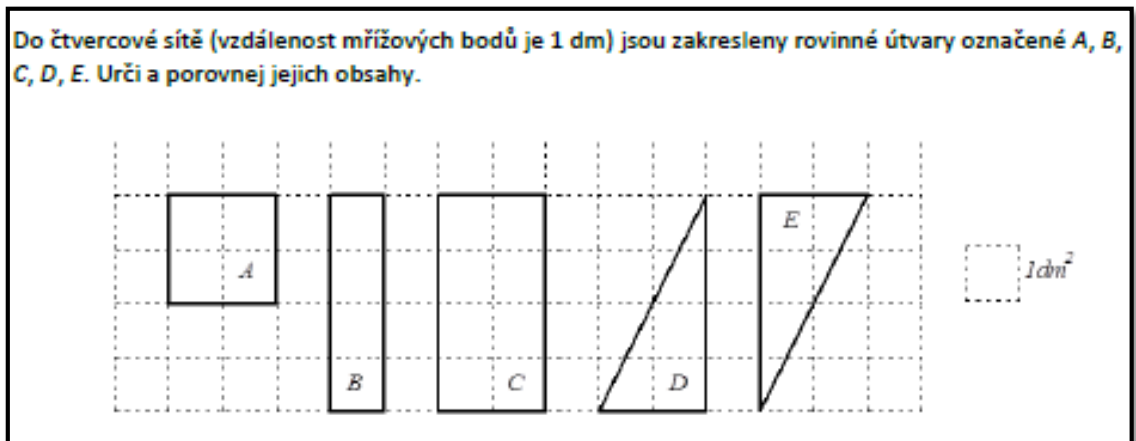


Obrázek 1: Ilustrativní úloha (Standardy pro základní vzdělávání, 2013, s. 70)

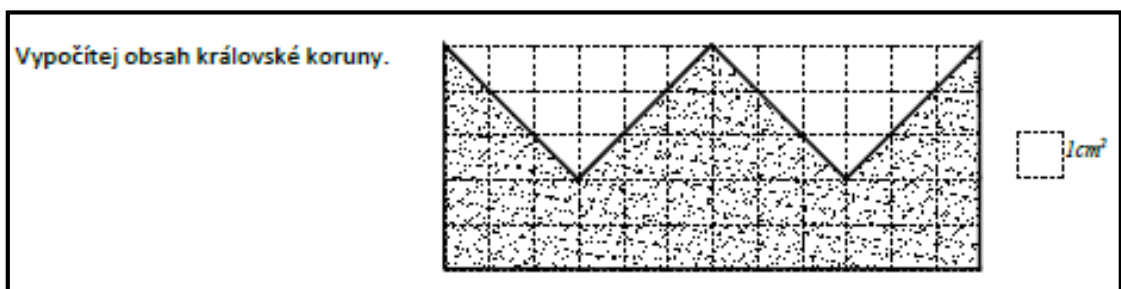
V metodických komentářích k tomuto výstupu můžeme nalézt další tři úlohy, které jsou již na vyšší úrovni. V první úloze (Obrázek 2) musí žák určit obsahy jednotlivých písmen a následně zjistit obsah plochy bez písmen. Druhá úloha (Obrázek 3) je ještě o trochu obtížnější, jelikož se v ní vyskytují i složitější útvary, které nepokrývají vždy celé čtverce – trojúhelníky. Třetí úloha (Obrázek 4) je kombinací dvou předchozích, žák musí vypočítat obsah útvaru, který je složen ze čtverců i trojúhelníků.



Obrázek 2: Ilustrativní úloha č. 1 (Fuchs & Zelendová, 2015, s. 86)



Obrázek 3: Ilustrativní úloha č. 2 (Fuchs & Zelendová, 2015, s. 86)



Obrázek 4: Ilustrativní úloha č. 3 (Fuchs & Zelendová, 2015, s. 87)

Obsah a obvod obrazce v mezinárodních šetřeních

V České republice pravidelně probíhají dvě mezinárodní šetření TIMSS a PISA. Obě tato šetření jsou z části zaměřená na matematiku a obsahují úlohy z geometrie zaměřené na obsah a obvod obrazce. V této kapitole podrobněji představím zmíněná šetření a uvedu konkrétní úlohy z geometrie, které se v nich vyskytují.

1.3 Mezinárodní šetření TIMSS

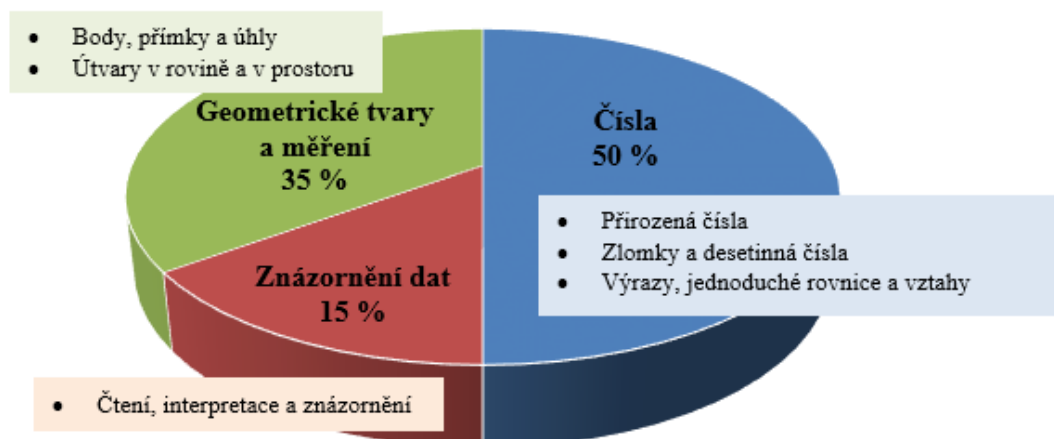
Mezinárodní šetření TIMSS, celým názvem Trends in International Mathematics and Science je zaměřeno, jak už název napovídá na dva obory, matematiku a přírodní vědy. Šetření probíhá ve dvou kategoriích (pro 4. ročník ZŠ a pro 8. ročník ZŠ) každé čtyři roky. Do šetření TIMSS je zapojeno více než 60 zemí z celého světa. Česká republika je zapojena pouze do testování žáků 4. ročníků ZŠ. Více informací o šetření TIMSS je k dispozici na internetových stránkách České školní inspekce.⁴

Poslední šetření TIMSS, které se uskutečnilo v roce 2019, ještě nejsou známy výsledky. Proto krátce shrnu výsledky šetření předposledního, tedy v roce 2015. V roce 2015 se do testování žáků 4. ročníků zapojilo 49 zemí z celého světa. V ČR se zúčastnilo 159 základní škol, tedy přes 5000 žáků. V matematice se Česká republika umístila na 21 místě.

Oblast matematika je v testování TIMSS rozdělena na tři části: Čísla, Geometrické tvary a měření a Znázornění dat. Jak můžeme vidět v Grafu 1, polovina zadávaných úloh je zaměřená na Čísla, 35 % úloh se týká geometrie a 15 % úloh se zaměřuje na Znázornění dat.

⁴ <https://www.csicr.cz/Prave-menu/Mezinarodni-setreni/TIMSS>

Matematika



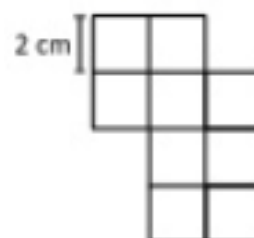
Graf 1: Procentuální zastoupení jednotlivých částí oblasti Matematika v šetření TIMSS (vytvořeno dle koncepce mezinárodního šetření TIMSS 2015 dostupné na webových stránkách⁵)

V této kapitole dále představím vybrané úlohy z šetření TIMSS 2015 a 2011, které spadají do oblasti geometrické tvary a měření a přidám úspěšnost žáků v ČR i celkovou. Všechny úlohy i údaje o úspěšnosti jsou převzaty z Publikace s uvolněnými úlohami z mezinárodního šetření TIMSS (Janoušková a kol., 2019).

Ukázková úloha z TIMSS č. 1 (Janoušková a kol., 2019, s. 55)

Tento obrazec je složen ze čtverců. Strany každého čtverce jsou dlouhé 2 cm. **Kolik cm je obvod obrazce?**

- A) 9 cm B) 14 cm C) 28 cm D) 36 cm



Cílem úlohy bylo ověřit, že žáci rozumí pojmu obvod obrazce a dokáží určit obvod mnohoúhelníku složeného z nepřekrývajících se čtverců s danou délkou strany.

Úspěšnost (%)	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika (2011)	48,9	49,2	48,7
Česká republika (2015)	54,6	55,1	54,1
Mezinárodní průměr (2015)	54,2	52,9	55,5

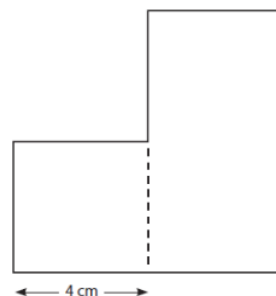
Tabulka 1: Úspěšnost žáků v ukázkové úloze z TIMSS č. 1 (Janoušková a kol., 2019, s. 55)

⁵ http://www.csicr.cz/html/Koncepce_TIMSS_2015/html5/index.html?&locale=CSY&pn=9

Ukázková úloha z TIMSS č. 2 (Janoušková a kol., 2019, s. 55)

Obrazec se skládá ze čtverce a z obdélníku. Šířka obdélníku je stejná jako strana čtverce. Délka obdélníku je dvakrát delší než jeho šířka. Urči obvod obrazce.

- A) 28 cm B) 32 cm C) 36 cm D) 40 cm



Cílem úlohy bylo zjistit, zda žáci rozumí pojmu obvod obrazce a dokáží vypočítat obvod mnohoúhelníku, který je složený ze čtverce a obdélníku.

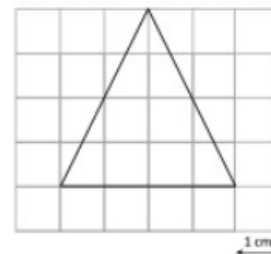
Úspěšnost (%)	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika (2011)	40,6	38,5	42,6
Česká republika (2015)	49,4	47,1	51,7
Mezinárodní průměr (2015)	43,9	42,2	45,6

Tabulka 2: Úspěšnost žáků v ukázkové úloze z TIMSS č. 2 (Janoušková a kol., 2019, s. 56)

Ukázková úloha z TIMSS č. 3 (Janoušková a kol., 2019, s. 58)

Trojúhelník je sestaven ve čtvercové síti. Kolik je jeho obsah?

- A) 4 centimetry čtverečné
B) 8 centimetrů čtverečných
C) 12 centimetrů čtverečných
D) 16 centimetrů čtverečných



Cílem úlohy bylo ověřit porozumění pojmu obsah obrazce a schopnost určitě obsah rovnoramenného trojúhelníku, který je nakreslený v centimetrové čtvercové síti.

Úspěšnost (%)	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika (2011)	31,4	35,4	28,0
Česká republika (2015)	31,8	32,7	30,6
Mezinárodní průměr (2015)	40,3	40,3	40,3

Tabulka 3: Úspěšnost žáků v ukázkové úloze z TIMSS č. 3 (Janoušková a kol., 2019, s. 58)

Jako ukázkové jsem vybrala takové úlohy, které přímo souvisí s očekávanými výstupy stanovenými v RVP ZV pro druhé období prvního stupně ZŠ, které jsem uvedla v předchozí kapitole. První dvě úlohy jsou zaměřeny na výpočet obvodu mnohoúhelníku (očekávaný výstup M-5-3-02) a ve třetí úloze žák určuje obsah obrazce ve čtvercové síti (očekávaný výstup M-5-3-04). U všech třech úloh je vidět poměrně nízká úspěšnost žáků, to může signalizovat, že žáci mají v této oblasti geometrie značné nedostatky.

1.4 Mezinárodní šetření PISA

Mezinárodní šetření PISA, celým názvem Programme for international Student Assessment je v současné době považováno za největší a nejdůležitější mezinárodní šetření, které měří výsledky vzdělávání. Šetření PISA se zaměřuje na zjišťování úrovně matematické, čtenářské a přírodovědné gramotnosti patnáctiletých žáků. Testování probíhá každé tři roky, přičemž pokaždé je kladen důraz na jednu z uvedených gramotností tak, aby bylo možno o ní získat detailnější informace. Více informací o šetření PISA naleznete na internetových stránkách České školní inspekce.⁶

Šetření PISA definuje matematickou gramotnost jako „*schopnost jedince formulovat, používat a interpretovat matematiku v různých kontextech. Zahrnuje matematické myšlení, používání matematických pojmů, postupů, faktů a nástrojů k popisu, vysvětlování a předpovídání jevů. Pomáhá jedinci si uvědomit, jakou roli matematika hraje ve světě, a díky tomu správně usuzovat a rozhodovat se tak, jak to vyžaduje konstruktivní, angažované a reflektivní občanství.*“ (Palečková & Tomášek, 2013, s. 11) Poslední šetření PISA zaměřené na matematickou gramotnost se uskutečnilo v roce 2012. Bylo do něj zapojeno 65 zemí světa. Z České republiky se zúčastnilo 297 škol, celkem šlo o 6535 studentů. Česká republika se umístila na 24. místě.

Matematickou gramotnost PISA analyzuje pomocí matematických postupů, matematického obsahu a kontextu. Každá testová úloha je zaměřena na konkrétní matematický obsah, přísluší jí určitý matematický postup a je zasazena do reálného kontextu. (Palečková & Tomášek, 2013)

⁶ <https://www.csicr.cz/Prave-menu/Mezinarodni-setreni/PISA>

Matematický obsah šetření PISA vychází z hlavních témat školního kurikula a je pro účely šetření rozdělen do čtyř okruhů

- **„Změna a vztahy** (funkce a algebra);
- **Prostor a tvar** (geometrie, dále prostorová představivost, měření a algebra);
- **Kvantita** (aritmetika, čísla, reprezentace);
- **Neurčitost a data** (pravděpodobnost a statistika). “

(Palečková & Tomášek, 2013, s. 12)

Matematické postupy šetření PISA rozděluje do tří kategorií:

- *„Formulovat situace matematicky;*
- *Používat matematické pojmy, fakta, postupy a uvažování;*
- *Interpretovat, aplikovat a hodnotit matematické výsledky.* “

(Palečková & Tomášek, 2013, s. 12)

Šetření PISA klade důraz na schopnost jedince řešit úlohy v kontextu reálného světa. Proto se snaží zasazovat úlohy do různých situací, ve kterých se jedinec ve 21. století nachází. PISA definuje čtyři okruhy kontextů:

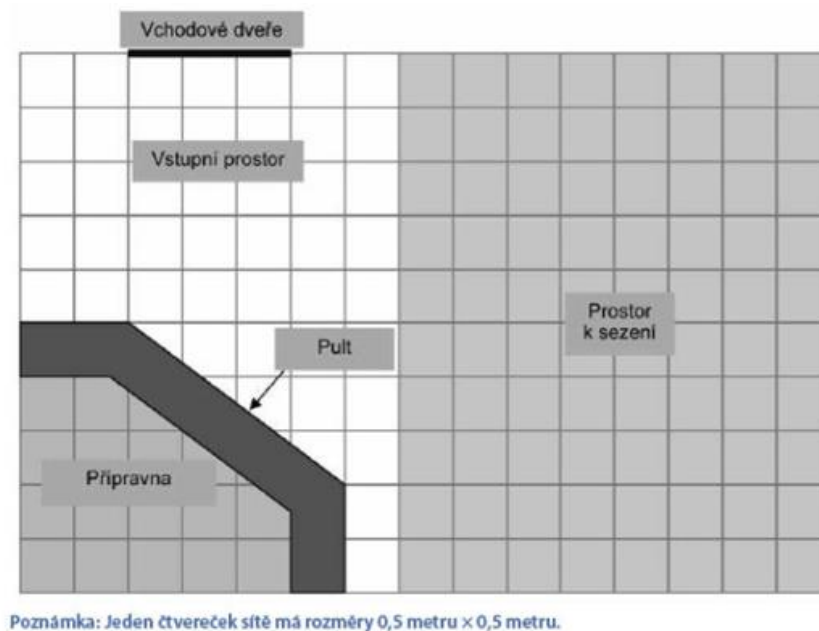
- Osobní (jedinec, rodina, známí)
- Profesní (svět práce)
- Společenský (komunita a společnost)
- Vědecký (příroda, věda, technologie)

(Palečková & Tomášek, 2013, s. 1)

Dále uvádím jednu ukázkovou úlohu z šetření PISA, která přímo souvisí s počítáním obsahu a obvodu geometrického útvaru ve čtvercové síti (očekávaný výstup M-9-3-04). Tato úloha obsahuje dvě otázky. Obě otázky spadají do matematického obsahu Prostor a tvar, jsou zaměřené na matematický postup Používání matematických pojmů, faktů, postupů a uvažování a obě jsou zasazené do pracovního kontextu.

Ukázková úloha z šetření PISA (Tomášek & Frýzek, 2013, s. 64-65)

Zadání úlohy Cukrárna: Na obrázku vidíš plánec Markétiny cukrárny. Rozhodla se, že v cukrárně provede malé změny. Přípravna je od ostatních prostor oddělena prodejním pultem.



Obrázek 5: Obrázek k zadání úlohy Cukrárna (převzato z Tomášek & Frýzek (2013, s. 64))

Otázka 1: Na vnější hranu pultu chce Markéta nalepit novou lištu. Kolik metrů lišty bude potřebovat? Napiš postup výpočtu.

Otázka 2: Markéta nechá v cukrárně udělat novou podlahu. Jaký je obsah podlahy v cukrárně, když nezapočteš přípravnu a pult? Napiš postup výpočtu.

Obě otázky byly zaměřeny na čtení údajů z plánu (čtvercové sítě) a aplikace matematiky v reálné situaci. První otázka byla zaměřena na aplikaci Pythagorovy věty. Cílem otázky 2 byl výpočet obsahu sedmiúhelníku, který lze rozdělit na nepřekrývající se jednoduché obrazce (obdélníky, trojúhelník). Student musí při řešení obou otázek vzít v úvahu měřítko plánu. Nízká úspěšnost řešení vypovídá o tom, že úloha je pro žáky velmi obtížná.

Úspěšnost (%)	Otázka 1	Otázka 2
Česká republika (2012)	20,17	17,25
Průměr zemí OECD (2012)	22,72	17,42

Tabulka 4: Úspěšnost žáků v ukázkové úloze z šetření PISA (Tomášek & Frýzek, 2013, s. 64-65)

Obsah a obvod obrazce ve státních přijímacích zkouškách

Každý žák základní školy, který chce jít studovat na střední školu nebo gymnázium skládá minimálně jednou za svou školní docházku státní přijímací zkoušku. Státní přijímací zkoušky jsou v České republice ve třech úrovních podle typu školy, na kterou se žák hlásí. V pátém ročníku může žák skládat přijímací zkoušku na osmileté gymnázium, v sedmém ročníku na šestileté gymnázium a v devátém ročníku jde o přijímací zkoušku na střední školu nebo čtyřleté gymnázium.

Státní přijímací zkoušky se skládají z českého jazyka a z matematiky a svým obsahem korespondují s RVP ZV. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání (Cermat) přesně specifikuje požadavky pro jednotlivé přijímací zkoušky. Všechny tyto specifikace jsou dostupné na internetových stránkách Cermat.cz.⁷

Geometrie v rovině a v prostoru	
Osmileté obory	určí pomocí čtvercové sítě obsah čtverce, obdélníku, trojúhelníku a obrazců tvořenými těmito rovinnými útvary, porovná a odhaduje obsahy rovinných útvarů a používá základní jednotky obsahu (cm^2 , m^2 , km^2), porovnává rovinné útvary stejného typu podle velikosti
Šestileté obory	používá a převádí jednotky délky a obsahu, odhaduje a vypočítá obvod a obsah čtverce, obdélníku a trojúhelníku, využívá čtvercovou síť pro výpočet obvodu a obsahu mnohoúhelníků, odhaduje a vypočítá obvod a obsah rovnoběžníku, lichoběžníku a dalších rovinných útvarů složených z trojúhelníků, resp. čtyřúhelníků
Čtyřleté obory	účelně používá přibližnou hodnotu čísla π (desetinné číslo, zlomek), vypočítá obvod a obsah kruhu a délku kružnice pomocí vzorců

Tabulka 5: Geometrie v rovině a v prostoru ve státních přijímacích zkouškách

⁷ <https://prijimacky.cermat.cz/menu/specifikace-pozadavku-k-jpz>

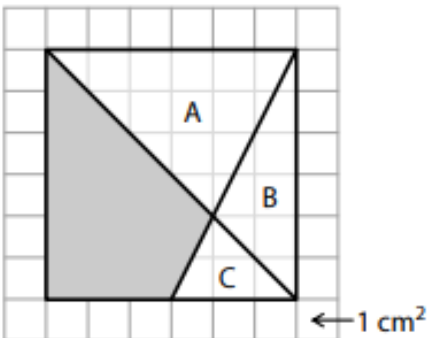
Ke každé úrovni přijímacích zkoušek uvádím ukázkovou úlohu. Velmi podobné úlohy se pak opakují v každém zadání testu k přijímacím zkouškám.

Ukázková úloha pro 5. ročník ZŠ

Tato ukázková úloha je zaměřena na obsah obrazce ve čtvercové síti. Na obrázku je zadán čtverec rozdělený na čtyři trojúhelníky. Pro vyřešení úlohy žák potřebuje vypočítat obsahy všech čtyř trojúhelníků. Žák v pátém ročníku nezná vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku, proto k výpočtu používá doplnění trojúhelníku na obdélník o stejné výšce. Trojúhelník je pak polovinou obsahu tohoto obdélníku.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

Čtvercová síť je tvořena čtverečky o obsahu 1 cm^2 .
 Ve čtvercové síti je zakreslen čtverec, který je rozdělen na 3 trojúhelníky a tmavý obrazec. Trojúhelníky jsou označeny písmeny A až C.



Vrcholy všech útvarů leží v mřížových bodech.

(CZVV)

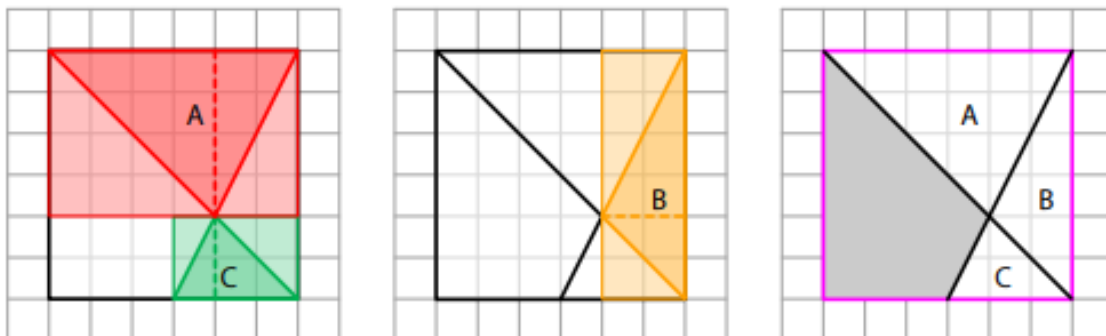
8 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (8.1–8.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

max. 4 body

	A	N
8.1 Obsah trojúhelníku A je dvojnásobkem obsahu trojúhelníku B.	☒	☐
8.2 Obsah celého čtverce je 12krát větší než obsah trojúhelníku C.	☒	☐
8.3 Obsah tmavého obrazce je větší než 15 cm^2 .	☐	☒

Obrázek 6: Ukázková úloha ze státních přijímacích zkoušek na osmiletá gymnázia

Řešení:



Obsah trojúhelníku A je polovinou obsahu červeného obdélníku, tj. $24 \text{ cm}^2 : 2 = 12 \text{ cm}^2$.
Obsah trojúhelníku B je polovinou obsahu oranžového obdélníku, tj. $12 \text{ cm}^2 : 2 = 6 \text{ cm}^2$.
Obsah trojúhelníku C je polovinou obsahu zeleného obdélníku, tj. $6 \text{ cm}^2 : 2 = 3 \text{ cm}^2$.
Obsah celého čtverce je 36 cm^2 .

Obsah tmavého obrazce je obsah celého čtverce zmenšený o obsahy trojúhelníků A, B, C:
 $36 \text{ cm}^2 - (12 \text{ cm}^2 + 6 \text{ cm}^2 + 3 \text{ cm}^2) = 36 \text{ cm}^2 - 21 \text{ cm}^2 = 15 \text{ cm}^2$.

8.1 $12 \text{ cm}^2 = 2 \cdot 6 \text{ cm}^2$
Tvrzení 8.1 je **pravdivé**.

8.2 $36 \text{ cm}^2 = 12 \cdot 3 \text{ cm}^2$
Tvrzení 8.2 je **pravdivé**.

8.3 15 cm^2 není větší než 15 cm^2 .
Tvrzení 8.3 je **nepravdivé**.

Obrázek 7: Řešení ukázkové úlohy ze státních přijímacích zkoušek na osmiletá gymnázia

Tato úloha je převzata z didaktického testu z druhého řádného termínu přijímacích zkoušek pro osmileté obory v roce 2019⁸. Úspěšnost žáků byla v úloze 10.1 68 %, v úloze 10.2 67 % a v úloze 10.3 72 %. ("Cermat - Anonymizovaná data", 2019)

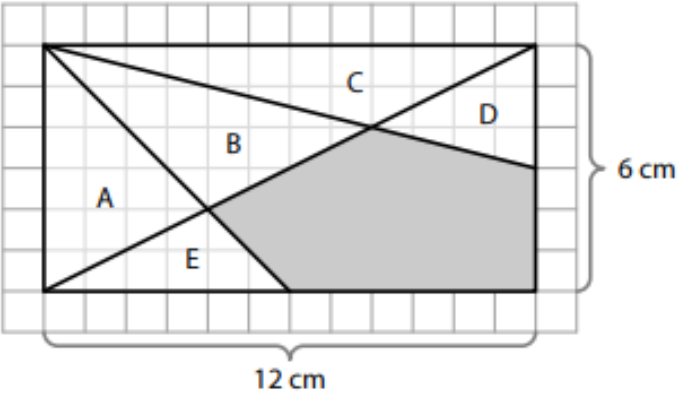
⁸https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/testova-zadani/8lete-mat/M5PBD19C0T02_reseni_final.pdf

Ukázková úloha pro 7. ročník ZŠ

Druhá ukázková úloha se velice podobá první úloze, která byla určena o dva roky mladším žákům. V této úloze je zadána velikost obdélníku, který je rozdělen na pět trojúhelníků a jeden pětiúhelník. Vyšší obtížnost je zde způsobena tím, že je obdélník rozdělen na více útvarů a také není zadána velikost jednoho čtverečku ve čtvercové síti, tu si žák musí nejdříve vypočítat. Pro správné zodpovězení otázek musí žák vypočítat velikost všech částí obdélníku. K tomu může využít vzoreček pro výpočet obsahu trojúhelníku, jak je ukázáno v Řešení na Obrázku 9. Úlohu by bylo možné řešit i bez znalosti vzorečku takovým způsobem, který byl využit v předchozí ukázkové úloze.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

Čtvercová síť je tvořena čtverečky s délkou strany 1 cm.
Ve čtvercové síti je zakreslen obdélník, který je rozdělen na 5 trojúhelníků a tmavý obrazec. Trojúhelníky jsou označeny písmeny A až E.



Vrcholy všech útvarů leží v mřížových bodech.

(CZVV)

max. 4 body

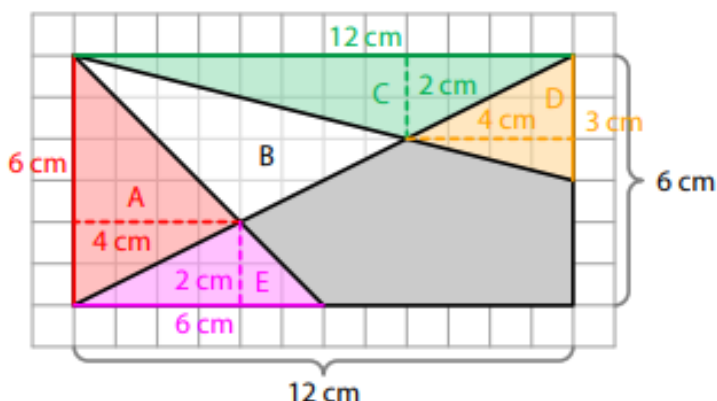
10 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (10.1–10.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

	A	N
10.1 Obsahy trojúhelníků A, C jsou stejné.	☒	☐
10.2 Obsah celého obdélníku je 12krát větší než obsah trojúhelníku D.	☒	☐
10.3 Obsah tmavého obrazce je větší než 24 cm^2 .	☐	☒

Obrázek 8: Ukázková úloha ze státních přijímacích zkoušek na šestiletá gymnázia

Řešení:

Vypočteme obsahy trojúhelníků A, C, D a E. (Zjistíme vždy délku strany a výšku na tuto stranu.)



Obsahy trojúhelníků:

$$A: \frac{6 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

$$C: \frac{12 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm}}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

$$D: \frac{3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$$E: \frac{6 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm}}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

Obsah celého obdélníku:

$$12 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 72 \text{ cm}^2$$

10.1 $12 \text{ cm}^2 = 12 \text{ cm}^2$

Tvrzení 10.1 je **pravdivé**.

10.2 $72 \text{ cm}^2 : 6 \text{ cm}^2 = 12$

Tvrzení 10.2 je **pravdivé**.

10.3 Od obsahu poloviny obdélníku odečteme obsahy trojúhelníků D a E:

$$72 \text{ cm}^2 : 2 - (6 \text{ cm}^2 + 6 \text{ cm}^2) = 36 \text{ cm}^2 - 12 \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$$

Tvrzení 10.3 je **nepravdivé**.

Obrázek 9: Řešení ukázkové úlohy ze státních přijímacích zkoušek na šestiletá gymnázia

Tato ukázková úloha je převzata z didaktického testu z druhého řádného termínu přijímacích zkoušek pro šestileté obory v roce 2019⁹. Úspěšnost žáků byla v úloze 10.1 67 %, v úloze 10.2 66 % a v úloze 10.3 64 %. ("Cermat - Anonymizovaná data", 2019)

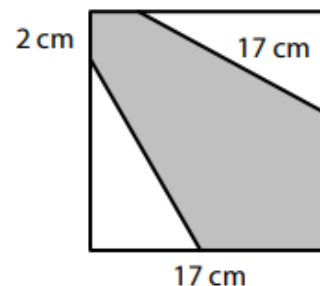
Ukázková úloha pro 9. ročník ZŠ

Třetí ukázková úloha je vybrána z přijímacích zkoušek na čtyřleté obory. Jedná se o úlohu zaměřenou na obsah šestiúhelníku, který je umístěný ve čtverci. Tento šestiúhelník oproti předchozím úlohám již není umístěný ve čtvercové síti, proto je řešení obtížnější. Žák si musí nejprve dopočítat délky odvěsen bílých trojúhelníků pomocí Pythagorovy věty. Následně vypočítá obsah těchto trojúhelníků a odečte ho od obsahu celého čtverce.

⁹ https://priimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/testova-zadani/6lete-mat/M7PBD19C0T02_reseni_final.pdf

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 13

Čtverec se stranou délky 17 cm je rozdělen na šedý šestiúhelník a dva shodné bílé trojúhelníky. Nejdelší strana bílého trojúhelníku má délku 17 cm. Nejkratší strana šedého šestiúhelníku měří 2 cm.



(CZVV)

2 body**13 Jaký je obsah šedého šestiúhelníku?**

- A) 127 cm²
- B) 144 cm²
- ☒ C) 169 cm²
- D) 177 cm²
- E) jiný obsah

Řešení:

Obsah čtverce: $17 \text{ cm} \cdot 17 \text{ cm} = 289 \text{ cm}^2$

Určíme délky obou odvěsen bílého trojúhelníku.

Delší odvěsna: $17 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$

Kratší odvěsna: $\sqrt{17^2 - 15^2} \text{ cm} = \sqrt{289 - 225} \text{ cm} = \sqrt{64} \text{ cm} = 8 \text{ cm}$

Oba bílé trojúhelníky mají dohromady stejný obsah jako obdélník se stranami délek 15 cm a 8 cm: $15 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} = 120 \text{ cm}^2$

Obsah šedého šestiúhelníku: $289 \text{ cm}^2 - 120 \text{ cm}^2 = 169 \text{ cm}^2$

Obrázek 10: Zadání a řešení ukázkové úlohy ze státních přijímacích zkoušek na čtyřleté obory

Třetí ukázková úloha je převzata z didaktického testu z prvního řádného termínu přijímacích zkoušek pro čtyřleté obory v roce 2019¹⁰. Úspěšnost žáků v této úloze byla 44 %. Dalších 22 % žáků bylo pro variantu B, 11 % pro variantu D, 6 % pro variantu A a 7 % žáků bylo pro jiný obsah. 10 % žáků vůbec neodpovědělo. ("Cermat - Anonymizovaná data", 2019)

¹⁰ https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/testova-zadani/4lete-mat/M9PAD19C0T01_reseni_final_ZA.PDF

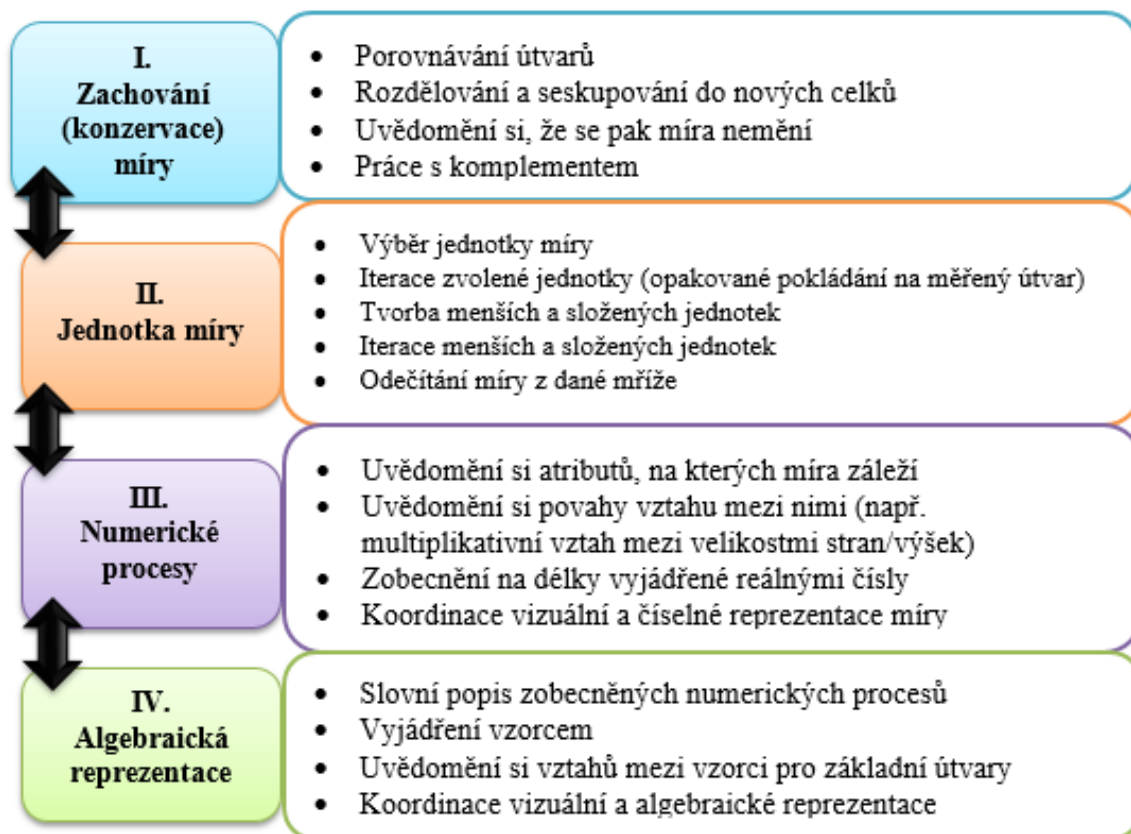
Pojmotvorný proces žáků při vytváření pojmu „míra“ v geometrii

Mírou v geometrii v této kapitole rozumíme měření ploch (pozemků, dláždění reprezentovaných útvarů v rovině apod.) pomocí jednotek plošné míry. Vondrová vychází ze dvou základních premis:

- „*Míra sjednocení dvou nepřekrývajících se útvarů je rovna součtu měr těchto útvarů*
- *Míry shodných útvarů jsou si rovny*“ (Vondrová & Rendl, 2015, s. 254)

Vondrová (2015, s. 254) zdůrazňuje, že otázky míry v geometrii jsou důležitým spojovníkem mezi abstraktním světem konkrétním světem fyzických předmětů, ale také spojuje prostorové geometrické pojmy s numerickými (např. obsah obdélníku se používá také pro vysvětlení multiplikativních operací, k demonstraci komutativity násobení, k vizualizaci vzorců apod.)

Pojmotvorný proces míry v geometrii popisuje Vondrová (2015, s. 255) pomocí schématu znázorněného na obrázku 11 a zdůrazňuje, že se nejedná o lineární proces, jak by se ze schématu mohlo zdát. Žák se například může současně zabývat zachováním míry a jednotkami míry nebo žák, který již zná vzorec pro výpočet obsahu obdélníku, se může vrátit zpět, aby si uvědomil podstatu multiplikativního vztahu.



Obrázek 11: Schéma pojmotvorného procesu míry v geometrii (Vytvořeno dle Vondrová, 2015, s. 255)

Schéma poukazuje na nezbytnost každé části pojmotvorného procesu v oblasti míry v geometrii a nutnost opakovaných návratů k předchozím krokům, která je znázorněna pomocí oboustranných šipek.

Podstatou první fáze, tedy zachování (konzervace) míry je pochopení toho, že když rozdělíme útvar na části a tyto části seskupíme jinak, nedojde ke změně obsahu útvaru. G. Kospentaris, P. Spyrou a D. Lappas (2011 dle Vondrová & Rendl, 2015, s. 256) se ve své práci zabývali dynamickým pohledem na pojem míra geometrických útvarů, který zdůrazňuje změnu obsahu (či jeho zachování) v závislosti na změně tvaru útvaru. Dynamický pohled na pojem míry klade důraz na úlohy, v nichž žáci porovnávají obsahy útvarů (překrytím, položením útvarů vedle sebe), rozdělují útvary na části a přeskupují je do jiných tvarů a zjišťují, jak lze útvar pokrýt jinými tvary (nejen čtverci) apod. (Vondrová & Rendl, 2015, s. 256)

Ve druhé fázi hraje hlavní roli jednotka a její tvar. Žák musí zvolit vhodnou jednotku pro měření a pak ji opakovaně pokládat na měřený útvar, a to bez mezer a překrývání. Jednotkou může být úsečka o délce 1 cm nebo čtverec o obsahu 1 cm^2 , ale také jakákoli jiná jednotka, kterou si žák zvolí a prohlásí ji za jednotku. Pro správný přesun ze druhé fáze do třetí, a tedy od počítání jednotek, které pokrývají útvar ke tvorbě numerických procesů, je důležité, aby žák pracoval i se částmi jednotek (jejich polovinami, třetinami apod.), které pokrývají daný útvar. Po pokrytí útvaru jednotkami je potřeba zjistit počet jednotek. Přitom žák postupuje od počítání jednotek po jedné, přes jejich sloučení do složených jednotek¹¹ a zjišťování počtu složených jednotek až po počítání jednotek nebo složených jednotek pokrývajících daný útvar jen v představě. V této fázi jsou důležité i opačné úlohy, kdy je jednotka předem daná (útvar je nakreslený např. na čtverečkovaném papíru). V takových úlohách žák odečítá číselnou hodnotu míry z předloženého obrázku. (Vondrová & Rendl, 2015, s. 256)

Při přechodu mezi fází II a III musí žák učinit velký skok v uvažování. Musí si totiž uvědomit podstatu multiplikativního vztahu v oblasti míry v geometrii. Tento přechod bývá motivován různými obrázky, které reprezentují souvislost výpočtu obsahu a násobení přirozených čísel, např. obdélník rozdělený jednotkovou mřížkou. Rozdělením jednotek na menší části získáme reprezentaci souvislosti výpočtu obsahu a násobená zlomků. Procesem, kdy se jednotka stále zmenšuje, dochází ke zobecnění výpočtu na reálná čísla. V této fázi bývá problematický také přechod od jednoduchých útvarů k nepravidelným útvarům, či různě zakřiveným, u kterých není možné představit si pokrývání čtverci. (Vondrová & Rendl, 2015, s. 257)

Ve čtvrté, nejabstraktnější fázi pojmotvorného procesu je použit jazyk algebry a vznikají tak vzorce (Vondrová & Rendl, 2015, s. 257). Vzorce jsou symbolikou zestručnělé věty, obsahují jádro poznatku, dají se snadno zapamatovat a dobře se s nimi pracuje. Na druhou stranu stojí vzorce v poznatkové struktuře často osamoceně jako náhrada skutečného poznání. Vzorce umožňují žákům vypočítat i to, čemu nerozumí a tím zakrývají formálnost poznání. (Hejný a kol.; 1990 dle Vondrová & Rendl, 2015, s. 258).

¹¹ Složenou jednotkou může být např. řada jednotkových čtverců (Vondrová & Rendl, 2015)

1.5 Obtíže žáků v oblasti míry v geometrii v souvisejícím výzkumu

Na základně provedených výzkumů Vondrová (2015) dokládá několik hlavních problémů, které žáci mají v oblasti míry v geometrii:

- Žáci různého věku mají představu, že pokud mají dva útvary stejný obsah, jsou také shodné. (Kospentaris, Spyrou, Lappas, 2011 dle Vondrová & Rendl, 2015, s. 259)
- Žáci různého věku mají představu, že útvary které mají stejný obsah, musí mít také stejný obvod a naopak. (Kospentaris, Spyrou, Lappas, 2011 dle Vondrová & Rendl, 2015, s. 259)
- Pro žáky od 1. do 4. ročníku je výrazně snazší zjistit délku či obsah útvaru pomocí jednotek poloviční velikosti než pomocí jednotek původních a než pomocí jednotek dvojnásobné velikosti. (Curryová, Mitchelmore, Outhredová, 2006 dle Vondrová & Rendl, 2015, s. 260)
- Žáci nerozumí souvislostem mezi operací násobení zjišťování obsahu. Někteří žáci nechápou, jak může být součin dvou délek vytvořit jednotku obsahu. (Sowder et al. 2004 dle Vondrová & Rendl, 2015, s. 261)
- Žáci různého věku mají jen povrchní znalost vzorců a procedur (Sowder et al. 2004 dle Vondrová & Rendl, 2015, s. 261)
- Na základě neznalosti procedur si žáci pletou vzorce pro obvod a obsah. (Divišová, 2012 dle Vondrová & Rendl, 2015, s. 261)
- Žáci nerozumí souvislosti vzorce pro výpočet obsahu obdélníku se vzorcí pro obsah rovnoběžníků a trojúhelníků. (Huang, Witz, 2011 dle Vondrová & Rendl, 2015, s. 261)

1.6 Didaktické důvody obtíží žáků

Mezi příčiny obtíží žáků v oblasti míry v geometrii patří kromě důvodů týkajících se kognitivního stupně vývoje dětí a náročnosti tématu také didaktické důvody. Vondrová (2015) předkládá shrnutí didaktických důvodů, které se v odborné literatuře uvádějí nejčastěji.

- **Podceňování důležitosti pochopení jednotky míry** – žáci nejsou vedeni k vytváření vlastních nástrojů měření. Žáci neřeší úlohy zaměřené na pokrývání obrazce pomocí

běžně užívaných či vlastních jednotek a jejich částí, popřípadě je tato fáze příliš krátká.

- ***Malý důraz na vztah mezi multiplikativní operací a obsahem*** – Vztah mezi numerickou operací násobení a výpočtem obsahu je považován učiteli i učebnicemi jako zřejmý.
- ***Přílišný důraz na výpočty, tedy zjišťování číselného ohodnocení míry*** – výpočty míry nebývají propojovány s geometrickou představou. Jde tak o manipulaci s čísly, kterou někteří žáci provádí bez porozumění.
- ***Důraz na převodní vztahy mezi jednotkami při výuce převodů jednotek na úkor porozumění řádům*** – je kladen důraz na mechanické zvládnutí pravidla bez pochopení velikosti jednotek a souvislosti s desetinnými čísly
- ***Příliš brzký nástup vzorců, tedy předčasná algebraizace*** – po zavedení vzorců se učitelé již zpravidla nevracejí k předchozím fázím pojmotvorného procesu míry
- ***Malý důraz na důkladné pochopení výpočtu obsahu obdélníku, které je důležité pro pochopení výpočtu obsahu dalších útvarů*** – žáci jsou málokdy vedeni ke zkoumání vztahu výpočtu obsahu obdélníku a dalších útvarů (trojúhelníku, rovnoběžníku). Většinou bývá tento vztah jen zmíněn a pak se k němu učitelé už nevracejí.

(Vondrová & Rendl, 2015, s. 262)

Ověření schopnosti žáků řešit úlohy zaměřené na obsah a obvod obrazce

V praktické části práce jsem se zaměřila na ověření schopnosti žáků řešit geometrické úlohy na obvod a obsah obrazce ve čtvercové síti. Pro tento účel jsem vytvořila didaktický test obsahující 10 úloh. Didaktický test je v této kapitole podrobněji popsán a je dostupný v příloze této práce.

1.7 Didaktický test

Nestandardizovaný didaktický test, který jsem vytvořila pro účely ověřování, obsahuje deset úloh. Všechny úlohy se týkají obvodu a obsahu obrazce. Kromě prvních dvou úloh se jedná o úlohy zasazené do čtvercové sítě. Úlohy jsou seřazeny od nejjednodušší po nejobtížnější. Celý didaktický test je k dispozici v přílohách této práce.

1.8 Charakteristika testovaných žáků

Ověřování se zúčastnilo celkem 62 žáků základní školy v Českých Budějovicích. Jednalo se o 27 dívek a 35 chlapců. Všichni testovaní žáci byli žáky 6. ročníku. Didaktický test byl zadáván v říjnu, kdy žáci měli za sebou opakování probrané látky z prvního stupně. Test byl zadáván v běžné hodině matematiky.



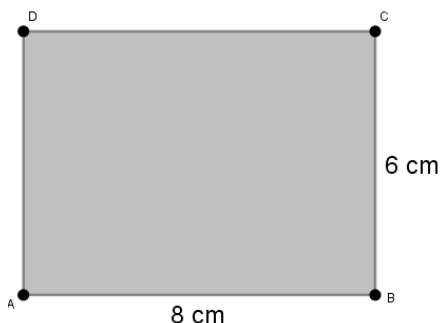
Graf 2: Testovaní žáci dle pohlaví

1.9 Rozbor úloh didaktického testu

V následujících kapitolách analyzuji jednotlivé úlohy didaktického testu. U každé úlohy uvádím krátký popis dané úlohy a ukázkové řešení. Každá úloha může mít více různých variant řešení, uvádím pouze jedno. Každou úlohu doprovází zhodnocení žakovské úspěšnosti a také ukázky konkrétních žakovských řešení.

1.9.1 Úloha 1 a 2

Obrázek k Úlohám č. 1 a č. 2:



Úloha č. 1:

Jaký je obvod šedého obrazce?

Úloha č. 2:

Jaký je obsah šedého obrazce?

Cílem prvních dvou úloh bylo zjistit, zda žáci dokáží vypočítat obvod a obsah obdélníku, pokud mají přímo zadané délky jeho stran. Šlo o standardní úlohy, které se běžně objevují v učebnicích jako úvodní cvičení k tématu obvod a obsah obdélníka.

Řešení:

Úloha 1: Obvod obdélníku vypočítáme dosazením do vzorečku:

$$o = 2(a + b)$$

$$o = 2(8 + 6) = 2 \cdot 14 = 28 \text{ cm}$$

Nebo sečtením délek stran obdélníku: $o = 8 + 6 + 8 + 6 = 28 \text{ cm}$

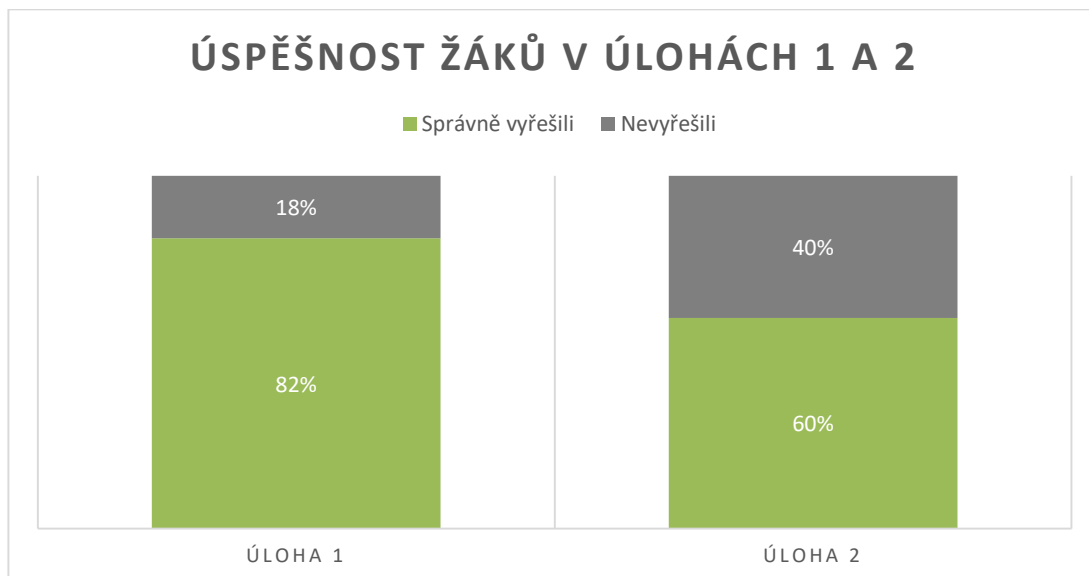
Úloha 2: Obsah obdélníku vypočítáme dosazením do vzorečku:

$$S = a \cdot b$$

$$S = 8 \cdot 6 = 48 \text{ cm}^2$$

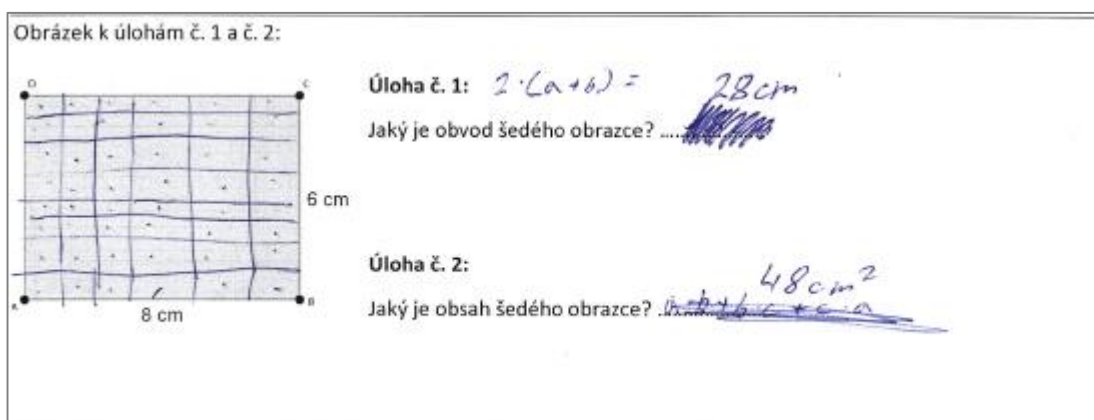
K výpočtu žáci většinou používali vzorečky. Do těchto vzorečků dosadí délky stran a vypočítají. Ve druhé úloze se několikrát objevil chybný výsledek 96 cm^2 , který byl způsobený užitím vzorečku $S = 2(a \cdot b)$. Tento vzorec vznikl pravděpodobně zkomolením vzorce pro obvod a obsah.

Ukázalo se, že většina testovaných žáků s touto úlohou neměla problém. Úlohu 1 vyřešilo z celkových 62 žáků správně 51 žáků. Úlohu 2 vyřešilo jen 37 žáků. Procentuální úspěšnost v prvních dvou úlohách ukazuje Graf. 3.



Graf 3: Úspěšnost žáků v Úlohách 1 a 2

Žákovské řešení Úlohy 1 a 2:



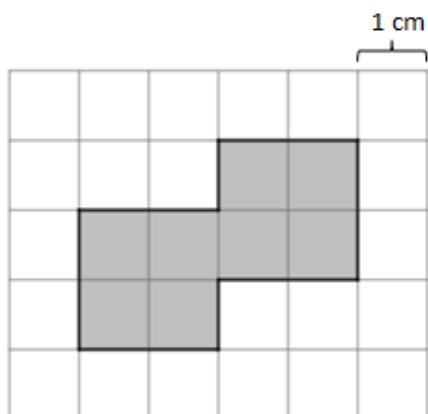
Obrázek 12: Žákovské řešení Úloh 1 a 2

V žákovském řešení na obrázku 12 si můžeme všimnout několika věcí. Pro Úlohu 1 žák použil vzoreček, není ale jisté, zda ho doopravdy použil, jelikož chybí krok, kdy by bylo do vzorečku dosazeno. Výsledek je ale správný. V Úloze 2 žák pravděpodobně neznal vzoreček a při počítání obsahu si chtěl pomoci rozdělením obdélníku na jednotkové čtverce. Zde se stala chyba v tom, že si žák delší stranu obdélníku rozdělil na 6 částí místo osmi a kratší

stranu na 8 částí místo šesti. Potom spočítal vniklé obdélníky „po jednom“. Výsledek vychází správně i přes to, že postup je špatný.

1.9.2 Úloha 3 a 4

Obrázek k Úlohám č. 3 a č. 4:



Úloha č. 3:

Jaký je obvod šedého obrazce?

Úloha č. 4:

Jaký je obsah šedého obrazce?

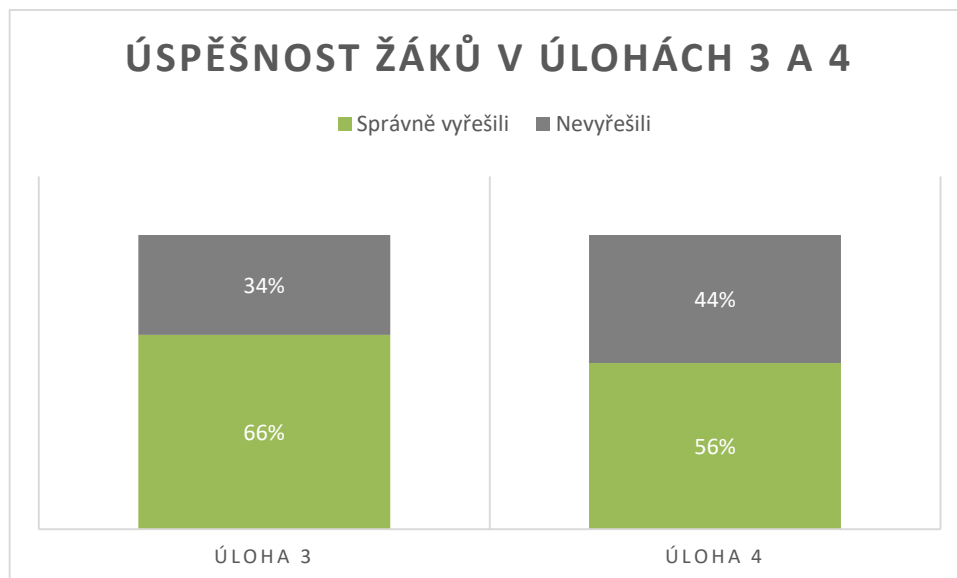
Cílem úloh bylo zjistit, zda žáci dokáží zjistit obvod a obsah obrazce ve čtvercové síti pokud každý čtvereček má strany dlouhé 1 cm. Obvod obrazce je záměrně obtažený černě a vnitřek obrazce je částečně průhledný tak, aby bylo vidět, z kolika malých čtverečků se útvar skládá. Jedná se o úlohy na minimální úrovni, které by žák měl po dokončení prvního stupně ZŠ zvládnout.

Řešení:

Úloha 3: Obvod obrazce zjistíme tak, že spočítáme, kolik stran jednotkového čtverce ohraničuje šedý obrazec. Zjistíme, že je jich 14, takže obvod šedého obrazce je 14 cm.

Úloha 4: Musíme si uvědomit, že čtverec o straně 1 cm má obsah 1 cm^2 . Potom spočítáme, kolik těchto čtverců zahrnuje šedého geometrického obrazce. To je 8 čtverců, takže obsah obrazce je 8 cm^2 .

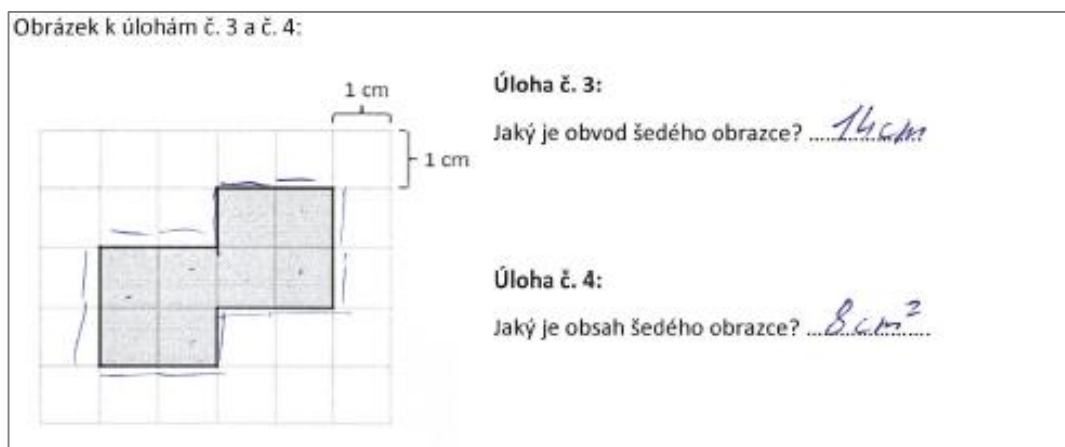
V porovnání s Úlohami 1 a 2 byly tyto úlohy pro žáky obtížnější. Opět byla mírně horší úspěšnost u výpočtu obsahu než obvodu. Úlohu 3 vyřešilo správně 41 žáků a Úlohu 4 pouze 35 žáků. Úspěšnost žáků v procentech uvádí Graf 4.



Graf 4: Úspěšnost žáků v Úlohách 3 a 4

Žákovské řešení Úlohy 3 a 4:

V žákovském řešení, které je na obrázku 13 můžeme ve čtvercové síti vidět pomocné čáry a tečky, které žák využil pro správné spočítání obou úloh. Při započítání jednotek délky obvodu si žák dělal pomocné čáry, aby spočítal všechny strany a zároveň nezapočítal žádnou stranu dvakrát. Při počítání obsahu útvaru si žák označoval započítané čtverečky tečkami.

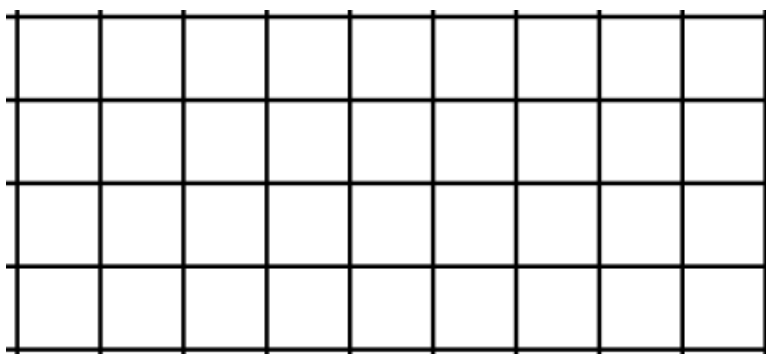


Obrázek 13: Žákovské řešení Úloh 3 a 4

1.9.3 Úloha 5

Úloha č. 5:

Zakresli do čtvercové sítě dva obrazce, které mají **stejný obsah** ale **různý obvod**.



Cílem Úlohy 5 bylo zjistit, zda žáci dokáží nakreslit dva obrazce o stejném obsahu ale rozdílném obvodu. Pro řešení této úlohy si žák musí uvědomit, že pokud se u obrazce změní obvod, ne vždy to znamená i změnu obsahu.

Řešení: Jedním možným řešením může být takové, že si vytvoříme jeden obrazec (např. čtverec o obsahu 4 čtverečky) a druhý obrazec vytvoříme tak, že ze čtyř čtverečků sestavíme jiný útvar, než čtverec.

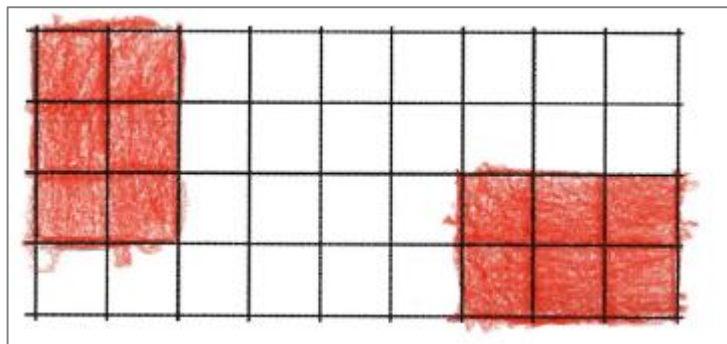
Žakovská úspěšnost v páté úloze byla téměř 50 %. Celkem 30 žáků úlohu vyřešilo správně a 32 žáků ji vyřešilo špatně či vůbec. Úspěšnost v procentech znázorňuje Graf 5.



Graf 5: Úspěšnost žáků v Úloze 5

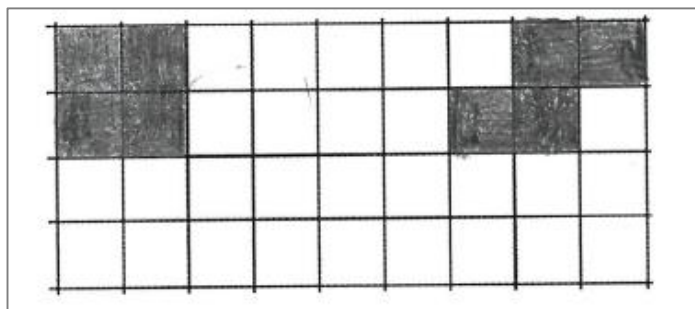
Žákovské řešení Úlohy 5:

V této úloze bylo mnoho různých způsobů řešení. Pro ukázkou vybírám některé zajímavé. Několikrát se mezi řešeními objevily dva shodné útvary, které byly pouze otočené. Z toho soudím, že někteří žáci si myslí, že při otočení útvaru dochází ke změně jeho obsahu. Ukázkou takového řešení můžeme vidět na Obrázku 14.

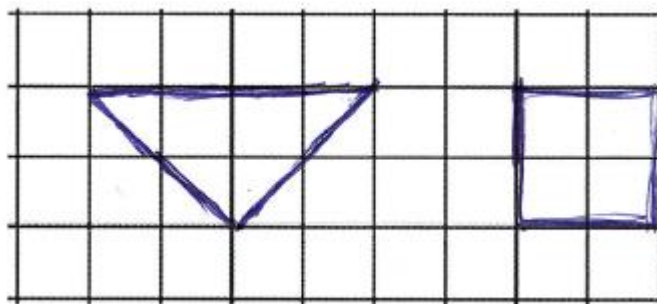


Obrázek 14: Chybné žákovské řešení Úlohy 5

Mezi žákovskými řešeními se ale objevovalo mnoho správných řešení. Téměř vždy se jednalo o útvary složené z celých čtverců (Obrázek 15), velmi výjimečně žáci využili ke tvorbě útvarů také trojúhelníky, jak je vidět na Obrázku 16.



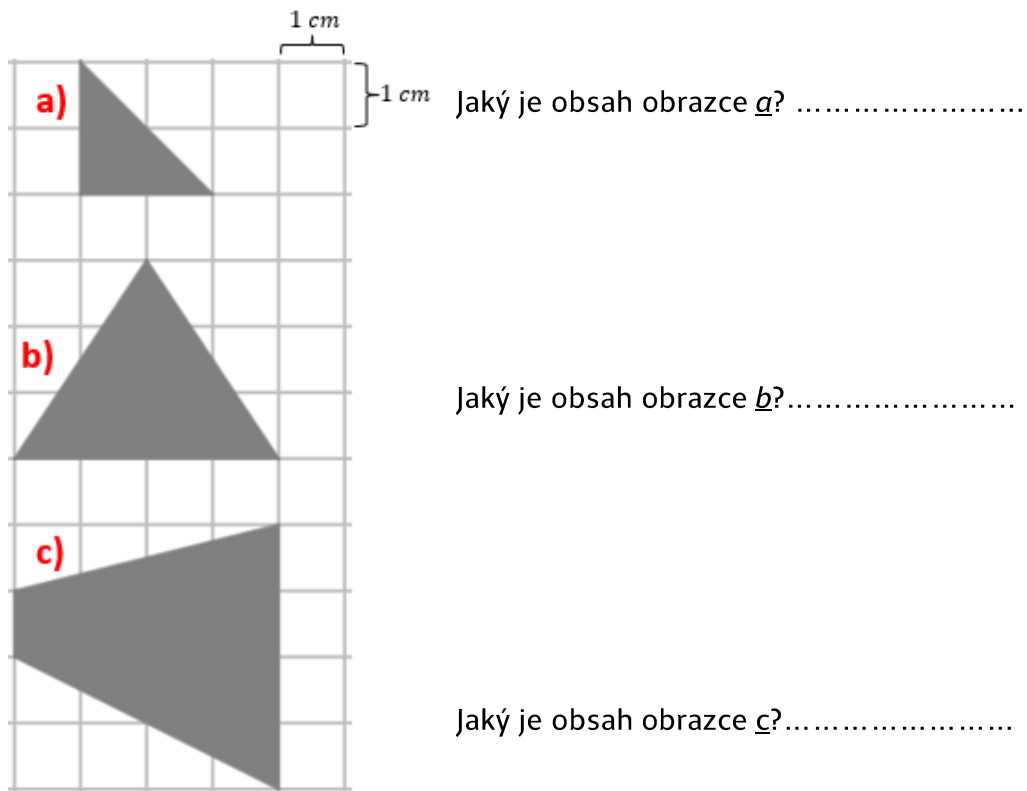
Obrázek 15: Správné žákovské řešení Úlohy 5



Obrázek 16: Správné žákovské řešení Úlohy 5

1.9.4 Úloha 6

Úloha č. 6: Urči obsahy těchto útvarů:

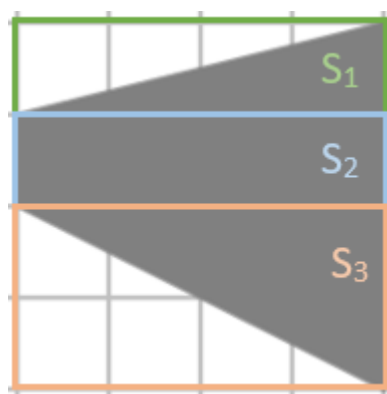


Cílem Úlohy 6 bylo ověřit, jak žáci zvládnou zjistit obsah obrazce ve čtvercové síti, který není složen pouze z celých čtverců. Útvary jsou seřazené od pravoúhlého trojúhelníku, přes rovnoramenný trojúhelník až po lichoběžník. Úloha 6 je oproti Úloze 4 obtížnější v tom, že útvary zde nejsou průhledné a není tak vidět čtvercová síť pod nimi.

Řešení:

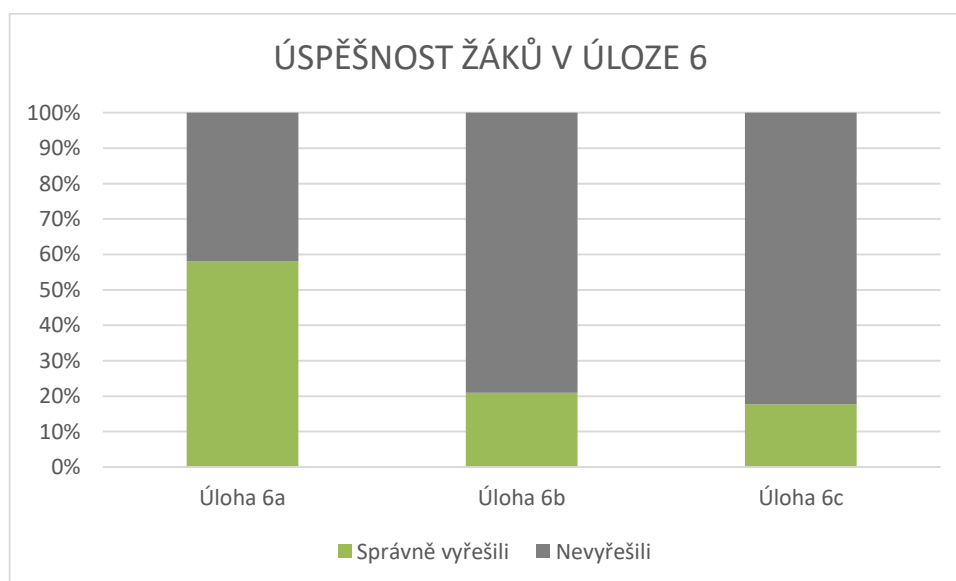
- úlohu je možné řešit doplněním pravoúhlého trojúhelníku na čtverec 2×2 čtverečky, který má obsah 4 cm^2 . Z obrázku je potom zřejmé, že pravoúhlý trojúhelník je jeho polovinou, tedy má i poloviční obsah. Výsledný obsah je tedy $S = 2 \text{ cm}^2$.
- Rovnoramenný trojúhelník můžeme rozdělit na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky, které by po přemístění vytvořili obdélník. Tento obdélník by měl velikost 2×3 čtverečky a tedy 6 cm^2 , stejně jako původní rovnoramenný trojúhelník

- c) Lichoběžník si můžeme rozdělit na dva trojúhelníky a jeden obdélník tak, jak je vidět na Obrázku 17. Vypočítáme obsahy jednotlivých částí a sečteme je. Obsah prvního trojúhelníku zjistíme tak, že si ho doplníme na obdélník (zelený) $4 \cdot 1 = 4 \text{ cm}^2$, trojúhelník tvoří jeho polovinu, tedy má také poloviční obsah $4 : 2 = 2 \text{ cm}^2$. Obsahu druhého trojúhelníku zjistíme stejným způsobem jako polovinu obdélníku (oranžový) $4 \times 2 = 8$ čtverečků. Polovina je tedy $8 : 2 = 4 \text{ cm}^2$. Poslední částí lichoběžníku je obdélník (modrý) o obsahu $4 \cdot 1 = 4 \text{ cm}^2$. Obsahy všech tří částí sečteme: $S_1 + S_2 + S_3 = 2 + 4 + 4 = 10 \text{ cm}^2$.



Obrázek 17: Rozdělení lichoběžníku na trojúhelníky a obdélník

Úspěšnost žáků v této úloze nebyla vysoká. Obsah prvního trojúhelníku zvládlo zjistit 36 žáků, obsah druhého už pouze 13 žáků a nakonec hodnotu obsahu lichoběžníku zjistilo pouze 11 žáků. Úspěšnost žáků v procentech znázorňuje Graf 6.

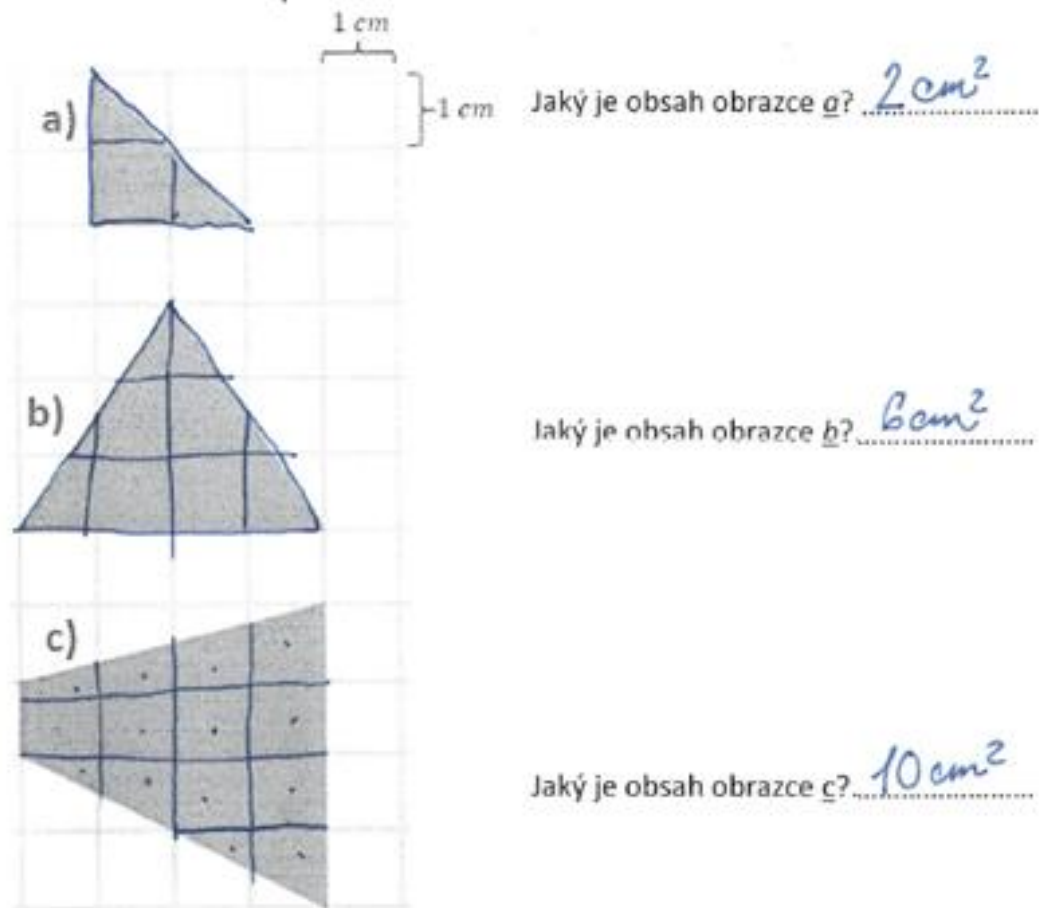


Graf 6: Úspěšnost žáků v Úloze 6

Žákovské řešení Úlohy 6:

Žáci, jejichž řešení byla správná, si do obrázků většinou dokreslili čtvercovou síť, která se jim skrývá pod útvarem. Toto dokreslení můžeme vidět na obrázku 18. Další postup pravděpodobně spočíval ve spočítání celých čtverečků a potom jejich částí, většinou se tedy jednalo o správný odhad.

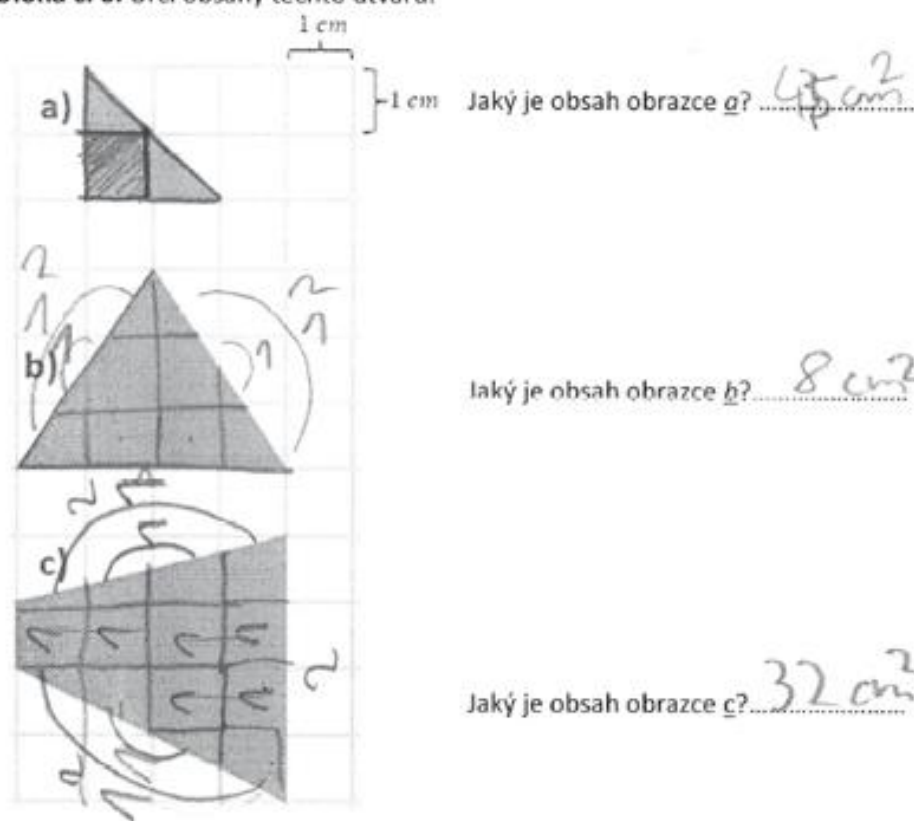
Úloha č. 6: Urči obsahy těchto útvarů:



Obrázek 18: Žákovské řešení Úlohy 6

Dále uvádím ještě jedno žákovské řešení, které obsahuje zajímavé dokreslení obrázků. Tento žák si nejdříve označil celé čtverečky a poté si k sobě přiřazoval části čtverečků, které vytvoří dohromady jeden celý. Přestože má žák všechny útvary rozdělené správně a jednotlivé části správně spojené, ani v jednom případě nemá uvedený správný výsledek.

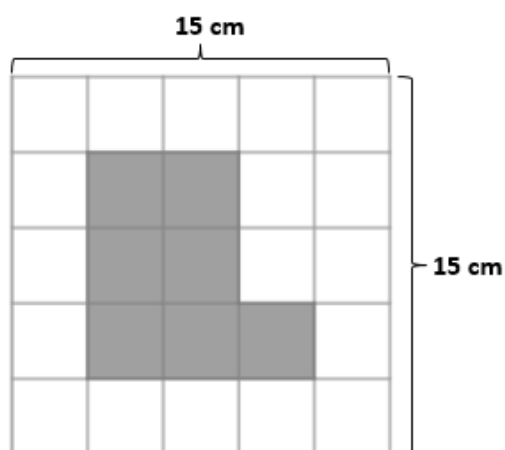
Úloha č. 6: Urči obsahy těchto útvarů:



Obrázek 19: Žákovské řešení Úlohy 6

1.9.5 Úloha 7 a 8

Obrázek k Úlohám č. 7 a č. 8:



Úloha č. 7:

Jaký je obvod šedého obrazce?

Úloha č. 8:

Jaký je obsah šedého obrazce?

Cílem těchto úloh bylo ověřit, zda žáci dokáží zjistit obsah a obvod obrazce ve čtvercové síti bez zadané velikosti jednoho čtverce, ale se zadanou velikostí celé čtvercové sítě. Zvýšená

obtížnost těchto dvou úloh spočívá v tom, že již není zadána velikost jednotkového čtverce. Žák si tedy nejprve musí spočítat, jak velký je jeden čtverec, ze kterých se čtvercová síť skládá. Až poté může vypočítat obvod a obsah útvaru.

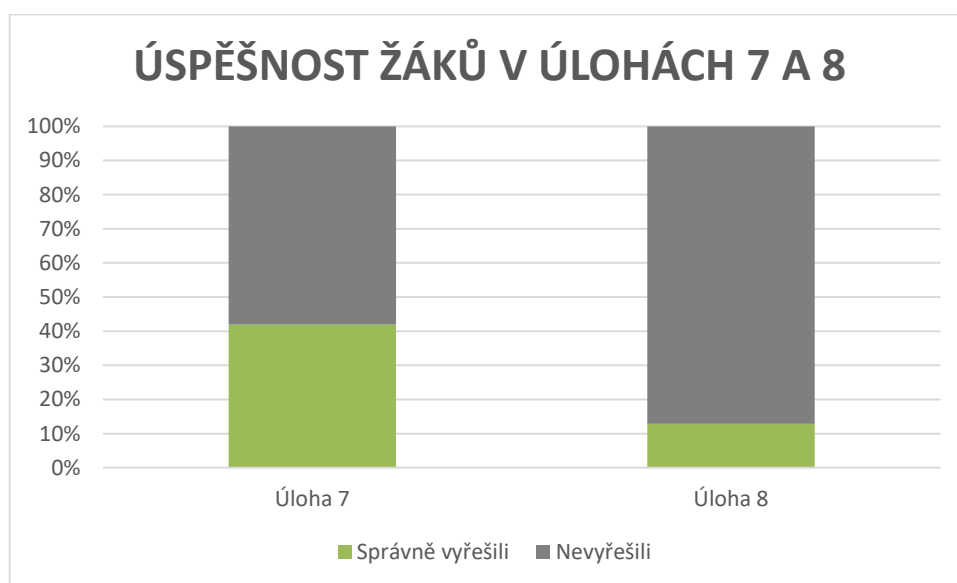
Řešení:

Nejprve musíme zjistit, jak velký je jeden čtvereček ve čtvercové síti o délce strany 15 cm. Každá strana čtvercové sítě je rozdělena na 5 dílů, každý díl tvoří stranu jednoho čtverečku. Délka strany čtverečku je tedy $15 : 5 = 3 \text{ cm}$.

Úloha 7: Obvod šedého útvaru můžeme zjistit podobně jako v Úloze 3, tedy spočítáním stran útvaru. Strany spočítáme po jedné a zjistíme, že je jich 12. Každá strana měří 3 cm. Výsledný obvod útvaru bude $12 \cdot 3 = 36 \text{ cm}$.

Úloha 8: Obsah šedého útvaru spočítáme opět podobně jako v úloze 4. Plocha šedého útvaru se skládá ze sedmi čtverečků. Obsah jednoho čtverečku je $3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}^2$. Obsah celého šedého útvaru je tedy $7 \cdot 9 = 63 \text{ cm}^2$.

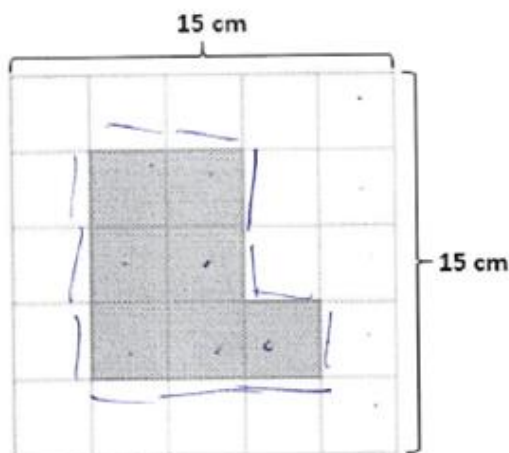
Žákovská úspěšnost v těchto úlohách byla velmi nízká. V Úloze 7 bylo úspěšných 26 žáků a v úloze 8 pouze 8 žáků. Procentuální úspěšnost ukazuje Graf 7. Mezi žáky, kteří úlohu nevyřešili, se objevovalo mnoho takových, kteří se o řešení ani nepokusili.



Graf 7: Úspěšnost žáků v Úlohách 7 a 8

Žákovské řešení Úloh 7 a 8:

Obrázek k úlohám č. 7 a č. 8:



Úloha č. 7:

Jaký je obvod šedého obrazce? 36 cm

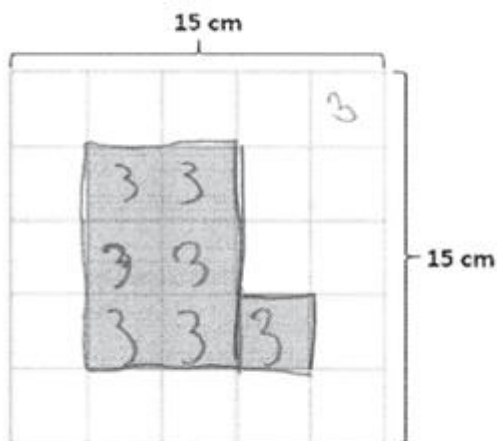
Úloha č. 8:

Jaký je obsah šedého obrazce? 21 cm²

Obrázek 20: Žákovské řešení Úloh 7 a 8

První ukázkové řešení (Obrázek 20) ukazuje, že si žák do obrázku dokresloval pomocné čárky a tečky pravděpodobně z toho důvodu, aby nezapomněl některou část započítat. Obvod obrazce má vypočítaný správně, ale v úloze 8 udělal chybu. Toto žákovské řešení neobsahovalo žádný výpočet, proto se můžeme podle výsledku jen domnívat, že si žák myslel, že čtverec o straně dlouhé 3 cm má obsah 3 cm². Tedy obrazec ze sedmi čtverečků má obsah $7 \cdot 3 = 21 \text{ cm}^2$. Tato myšlenka ale není správná.

Obrázek k úlohám č. 7 a č. 8:



Úloha č. 7:

Jaký je obvod šedého obrazce? 36 cm

Úloha č. 8:

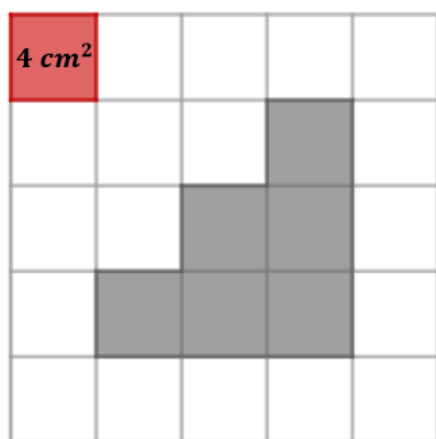
Jaký je obsah šedého obrazce? 57 cm²

Obrázek 21: Žákovské řešení Úloh 7 a 8

Ve druhé ukázce žákovského řešení (Obrázek 21) můžeme vidět správný výsledek Úlohy 7 bez výpočtu. V obrázku je zřetelné obtažení obrazce tužkou, žák si tím při počítání obvodu pravděpodobně pomáhal, aby započítal všechny části. Výsledek Úlohy 8 není správný a stejně jako předchozí neobsahuje žádný výpočet. Žák si dovnitř čtverečků dopsal trojky, z toho je zřejmé, že si myslel, že jeden čtvereček má obsah 3. Výsledek 57 cm mohl získat žák např. tak, že sečetl počet dílků, které ohraničují šedý útvar a počet čtverečků, ze kterých je složený. To je $12 + 7 = 19$. Každá část je 3 a proto provedl výpočet $19 \cdot 3 = 57 \text{ cm}^2$

1.9.6 Úlohy 9 a 10

Obrázek k Úlohám č. 9 a č. 10:



Úloha č. 9:

Jaký je obvod šedého obrazce?

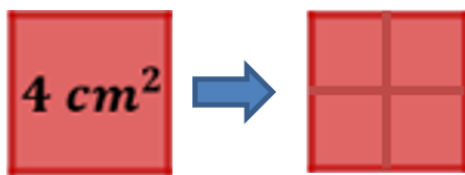
Úloha č. 10:

Jaký je obsah šedého obrazce?

Cílem těchto úloh bylo ověřit, zda žáci dokáží zjistit obvod a obsah obrazce ve čtvercové síti pokud mají zadán obsah jednoho čtverce, který je větší než 1 cm^2 .

Řešení:

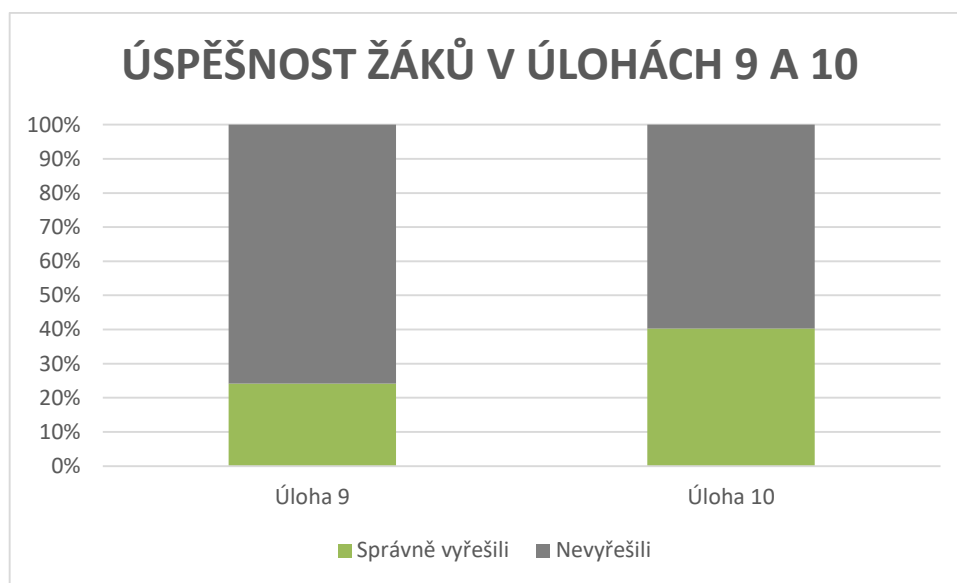
Úloha 9: pro výpočet obvodu šedého obrazce potřebujeme znát délku jedné strany. Obsah jednoho čtverce je 4 cm^2 takže si tento jednotkový čtverec můžeme rozdělit na 4 čtverečky o obsahu 1 cm^2 o délce strany 1 cm (Obrázek 22). Tím zjistíme, že jeden čtverec má délku strany 2 cm . Spočítáme po jedné, kolik těchto stran ohraničuje šedý obrazec. Zjistíme, že to je 12. Každá strana měří 2 cm . Tedy obvod obrazce je $12 \cdot 2 = 24 \text{ cm}$.



Obrázek 22: Rozdělení jednotkového čtverce

Úloha 10: Obsah jednoho čtverce je 4 cm^2 , jak je zadáno přímo v obrázku k úloze. Šedý obrazec se skládá ze šesti takových čtverců. Obsah šedého útvaru je tedy $6 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2$.

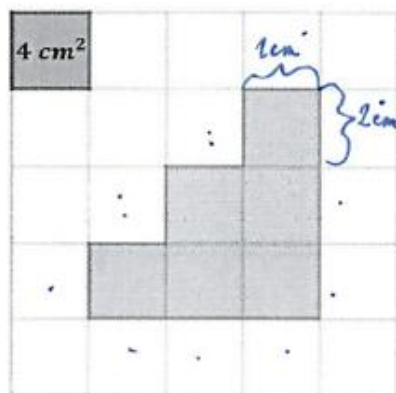
Úspěšnost posledních dvou úloh didaktického testu byla velmi nízká. Úlohu 9 vyřešilo správně pouze 15 žáků a Úlohu 10 vyřešilo 25 žáků. Jedná se tak o jedinou dvojici úloh v tomto didaktickém testu, ve které bylo pro žáky jednodušší zjistit obsah než zjistit obvod obrazce. Vzhledem k tomu, že obsah jednoho čtverce byl přímo zadán, není tento jev překvapivý. Procentuální úspěšnost znázorňuje Graf 8.



Graf 8: Úspěšnost žáků v Úlohách 9 a 10

Žákovské řešení Úloh 9 a 10:

Obrázek k úlohám č. 9 a č. 10:



Úloha č. 9:

Jaký je obvod šedého obrazce? 24 cm

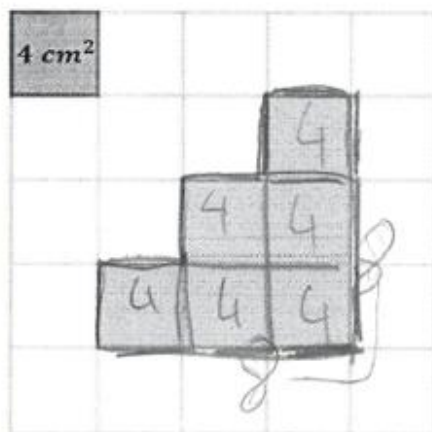
Úloha č. 10:

Jaký je obsah šedého obrazce? 24 cm²

Obrázek 23: Žákovské řešení Úloh 9 a 10

První ukázkové žákovské řešení obsahuje správné výsledky obou úloh. Podle poznámek v obrázku můžeme říci, že si žák správně určil délku strany jednoho čtverce a poté si pomocí teček spočítal strany útvaru. Tím určil správně obvod obrazce. Ke způsobu výpočtu obsahu nenapovídá nic. Pravděpodobně žák nepotřeboval k výpočtu žádné poznámky.

Obrázek k úlohám č. 9 a č. 10:



Úloha č. 9:

Jaký je obvod šedého obrazce? 48 cm

Úloha č. 10:

Jaký je obsah šedého obrazce? 72 cm²

Obrázek 24: Žákovské řešení Úloh 9 a 10

Druhé žákovské řešení (Obrázek 24) neobsahuje ani jeden správný výsledek. Kromě dokresleného obrázku řešení neobsahuje žádné výpočty, takže se můžeme pouze domnívat, jak žák dospěl k výsledkům. Výsledek Úlohy 9 je podle tohoto žáka 48 cm, k tomuto výsledku mohl dojít pomocí výpočtu $6 \cdot 8 = 48$. Použití čísla osm předpokládám podle

nákresu, šestka mohla být použita proto, že je útvar složen ze šesti čtverců. Řešení Úlohy 10 je podle tohoto žáka 72 cm^2 , opět nejsou k dispozici žádné výpočty. Jedna z variant, jak mohl žák k tomuto výsledku dospět je vynásobení obsahu jednoho čtverečku (4 cm^2) počtem vnějších i vnitřních stran celého šedého útvaru (18). Výpočet tedy mohl být $4 \cdot 18 = 72 \text{ cm}^2$. Oba výpočty nedávají žádný smysl a je zřejmé, že žák nemá dobře vytvořenou představu o pojmech obvod a obsah obrazce.

1.10 Shrnutí výsledků didaktického testu

Ověřování schopností žáků řešit úlohy zaměřené na obvod a obsah obrazce potvrdilo některé z obtíží, které byly definované ve čtvrté kapitole.

Sowder et al. (2004 dle Vondrová & Rendl, 2015, s. 261) tvrdí, že žáci různého věku mají jen povrchní znalost vzorců a procedur. To se projevilo i v testované Úloze 2, ve které žáci pro výpočet obsahu několikrát použili vymyšlený vzorec $S = 2 \cdot (a \cdot b)$. Tento vzorec je spojením vzorce pro obvod se vzorcem pro obsah obdélníku. Z toho můžeme soudit, že žáci znají vzorce pro obvod a obsah obrazce jen povrchně.

Dále se ukázalo, že si někteří žáci myslí, že pokud dojde k otočení obrazce stejné velikosti a tvaru, změní se tak jeho obvod. Toto se objevilo v Úloze 5, kde měli žáci zakreslit do čtvercové sítě dva útvary, které mají stejný obsah ale různý obvod. Řešení několika žáků obsahovalo dva shodné obrazce, které byly pouze jinak otočené. Tento způsob řešení by mohl mít také příčinu v tom, že žáci mají představu, že pokud mají útvary stejný obsah, jsou také shodné, to potvrzují Kospentaris, Spyrou, Lappas (2011 dle Vondrová & Rendl, 2015, s. 259). Tedy když se žáci snažili nakreslit dva útvary o stejném obsahu, došli k tomu, že nakreslili dva shodné útvary a jiné řešení už nehledali.

Vzhledem k vysoké neúspěšnosti v Úloze 6, která byla zaměřena na obsah trojúhelníku a lichoběžníku se můžeme přiklonit k tvrzení podle Huang, Witz (2011 dle Vondrová & Rendl, 2015, s. 261) že žáci nerozumí souvislosti vzorce pro výpočet obsahu obdélníku se vzorcem pro obsah rovnoběžníků a trojúhelníků. Nejde zde ani tak o vzorec jako o znalost souvislosti obsahu obdélníku s obsahem trojúhelníku ve čtvercové síti, kterou by žák během 1. stupně ZŠ měl získat.

Závěr

Ve své závěrečné práci jsem se věnovala obsahu a obvodu obrazce ve čtvercové síti v geometrii na 1. stupni základní školy. Prvním cílem práce bylo shrnout, jakým způsobem se toto téma objevuje ve státních dokumentech, mezinárodních šetřeních a také ve státních přijímacích zkouškách. Tento cíl jsem splnila v rámci prvních třech kapitol. Ze všech tří oblastí jsem vybrala konkrétní ukázkové úlohy, které jsou zaměřené na obvod a obsah obrazce na základní škole.

Dalším cílem bylo zjistit, jaké mají žáci s tématem obsah a obvod obrazce obtíže a ověřit jejich schopnosti řešit úlohy tohoto typu poté, co mají za sebou vzdělání na 1. stupni ZŠ. Obtíže žáků v oblasti obvod a obsah obrazce jsem popsala ve čtvrté kapitole, kde také poukazuji na didaktické důvody těchto obtíží. Ověření schopností žáků jsem provedla pomocí didaktického testu, který jsem popsala v páté kapitole a doplnila ho o ukázky žakovských řešení a úspěšnost žáků v každé úloze. Na závěr jsem shrnula poznatky z celého ověřování.

Literární zdroje

Cermat - Anonymizovaná data. (2019). <https://data.cermat.cz/menu/data-a-analyticke-vystupy-jednotna-prijimaci-zkouska/anonymizovana-data>

Fuchs, E., & Zelendová, E. (2015). *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání: Matematika*. Národní ústav pro vzdělávání.

Janoušková, S., Tomášek, V., Peclinovská, S., & Pražáková, D. (2019). *Publikace s uvolněnými úlohami z mezinárodního šetření TIMSS: Úlohy z matematiky a přírodovědy pro I. stupeň základní školy*. Česká školní inspekce. https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF_el._publikace/Mezin%C3%A1rodn%C3%AD%20%C5%A1et%C5%99en%C3%AD/Publikace-k-uvolnenym-uloham-TIMSS-2015-upr_2019_web.pdf

Palečková, J., & Tomášek, V. (2013). *Hlavní zjištění výzkumu PISA 2012: Matematická gramotnost patnáctiletých žáků*. Česká školní inspekce.

RVP ZV: Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. (2017). file:///C:/Users/Dagmar%20Melicharov%C3%A1/Desktop/RVP%20ZV_2017_%C4%8Der-2.pdf

Standardy pro základní vzdělávání: Matematika a její aplikace. (2013). <https://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=67490&view=9832>

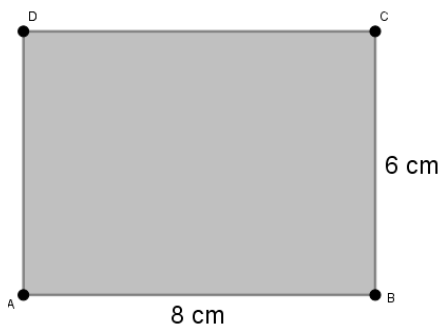
Tomášek, V., & Frýzek, M. (2013). *Matematická gramotnost - úlohy z šetření PISA 2012*. Česká školní inspekce.

Vondrová, N., & Rendl, M. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum.

Přílohy

Didaktický test

Obrázek k Úlohám č. 1 a č. 2:



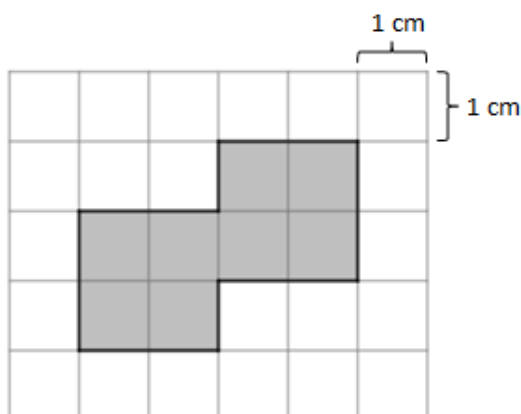
Úloha č. 1:

Jaký je obvod šedého obrazce?

Úloha č. 2:

Jaký je obsah šedého obrazce?

Obrázek k Úlohám č. 3 a č. 4:



Úloha č. 3:

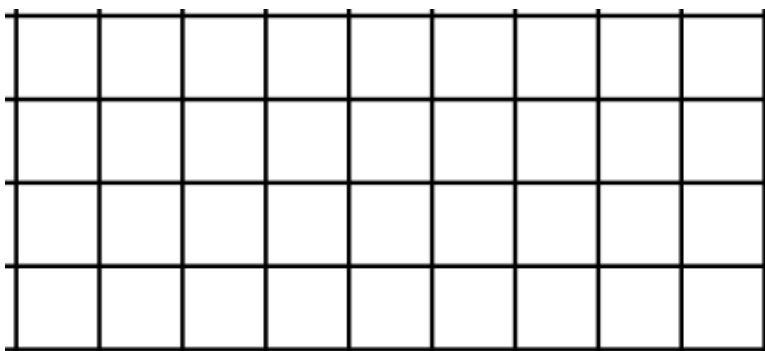
Jaký je obvod šedého obrazce?
.....

Úloha č. 4:

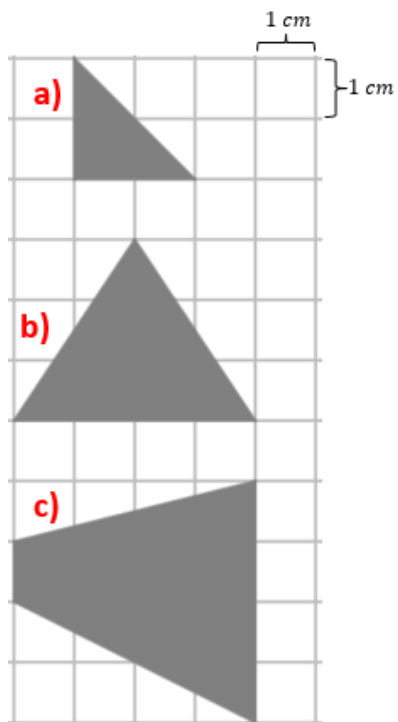
Jaký je obsah šedého obrazce?
.....

Úloha č. 5:

Zakresli do čtvercové sítě dva obrazce, které mají **stejný obsah** ale **různý obvod**.



Úloha č. 6: Urči obsahy těchto útvarů:

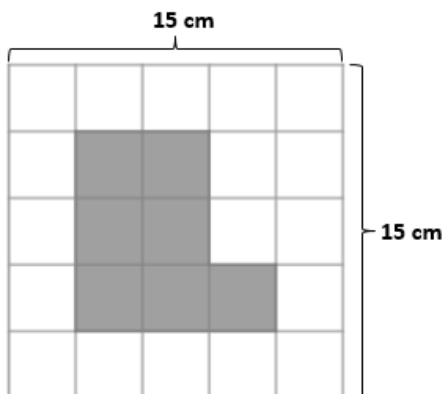


Jaký je obsah obrazce a?

Jaký je obsah obrazce b?

Jaký je obsah obrazce c?

Obrázek k Úlohám č. 7 a č. 8:



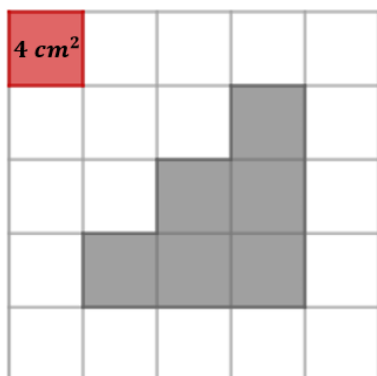
Úloha č. 7:

Jaký je obvod šedého obrazce?

Úloha č. 8:

Jaký je obsah šedého obrazce?

Obrázek k Úlohám č. 9 a č. 10:



Úloha č. 9:

Jaký je obvod šedého obrazce?

Úloha č. 10:

Jaký je obsah šedého obrazce?